TOME 16. N° 11. NOVEMBRE 1955.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE D'ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES RADIOACTIFS : LA CINÉ-NUCLÉOGRAPHIE. APPLICATION A LA MESURE DE LA PÉRIODE DU RADIUM *C'*. POSSIBILITÉ DE SON UTILISATION A LA DÉTERMINATION DES PÉRIODES DES RADIOÉLÉMENTS ARTIFICIELS

Par MARCEL LAPORTE,

Laboratoire de Recherches Électroniques de l'Institut du Radium, Paris.

Sommaire. — Par vaporisation sélective du Ra*C'* à partir du dépôt actif, on réalise à la périphérie d'un disque mobile une source de Ra*C'* qui est entraînée sous une plaque nucléaire. De la décroissance exponentielle du nombre des traces observées sur des bandes étroites perpendiculaires à la vitesse, on déduit très simplement la période du Ra*C'* ($T = 1{,}5 . 10^{-4}$ s).

On indique une généralisation de l'emploi de la méthode pour la détermination des périodes des radioéléments artificiels, en particulier dans le domaine $10^{-2} \geq T \geq 10^{-4}$ s.

La ciné-nucléographie, nouvelle méthode d'étude des phénomènes radioactifs, et son application aux mesures en valeur absolue des activités des émetteurs α et à la détermination de la période du thorium *C'* ont déjà fait l'objet de plusieurs publications [1]; rappelons-en seulement ici le principe : on utilise les observations (dénombrement, écartements, etc.) relatives aux traces des rayons sur une plaque nucléaire, mais la source radioactive, au lieu, comme il est habituel, d'être incorporée à l'émulsion, est disposée sur la périphérie d'un disque mobile autour d'un axe et animé d'une vitesse de rotation uniforme, réglable à volonté. La plaque est disposée parallèlement au plan du disque, à une distance de seulement quelques centièmes de millimètres.

La détermination de la période du thorium *C'* par ciné-nucléographie a présenté d'assez grandes difficultés : ces difficultés provenaient essentiellement du fait que la source mobile utilisée était constituée par le dépôt actif du thorium, dont les différents constituants émettaient des rayons et, par suite, fournissaient sur la plaque des traces enchevêtrées dont il n'est pas immédiat d'extraire les données utiles.

Nous avons pensé qu'une détermination beaucoup plus directe et facile de la période d'un radioélément à vie courte pourrait être obtenue si l'on parvenait à réaliser comme source mobile, une source « pure » constituée par ce seul radioélément.

La préparation d'une telle source ne pouvant être faite à l'avance, en raison même de la brièveté de la période, il fallait trouver un moyen de déposer cette source (à l'instant même de sa séparation), sur le disque mobile en mouvement de façon à l'amener sous la plaque en un temps suffisamment court.

Les corps *C'*, et en particulier le radium *C'*, nous ont paru se présenter favorablement à ce point de vue. Ces corps sont en effet des isotopes du polonium dont plusieurs expérimentateurs [2] ont établi que la volatilité, à des températures de quelques centaines de degrés, est beaucoup plus grande que celle des autres constituants du dépôt actif du radium.

Si donc, le segment médian R (*fig.* 1) d'un ruban de platine porteur du dépôt actif est placé au voisinage immédiat, par exemple au-dessus et très près (0,2 mm), du disque mobile, il doit être possible, en chauffant électriquement le ruban de provoquer —

et cela à peu près sélectivement — la vaporisation du radium C' et sa fixation sur la périphérie froide du disque mobile.

Ce dépôt peut, par volatilisation, être produit très près de la plaque; la vitesse de rotation du disque peut être choisie de façon que la durée de passage de la source entraînée de radium C' sous la plaque soit de l'ordre de quelques périodes : dans ces conditions, on conçoit qu'il y ait lieu de s'attendre à une décroissance de la densité des traces inscrites, corrélative à la décroissance de l'activité de la source au cours de son passage sous la plaque.

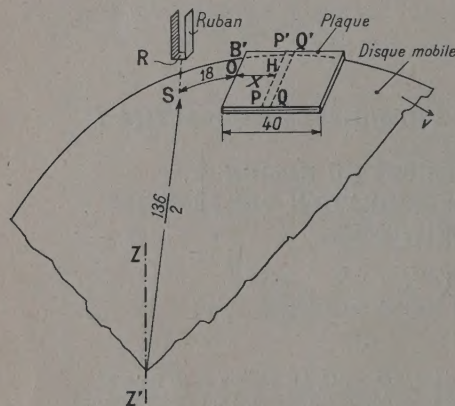


Fig. 1.

Le disque, dont il n'est représenté qu'un segment, est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe vertical Z'Z; il entraîne sous la plaque la source S de radium C' vaporisée à partir du segment médian R d'un ruban de platine, porteur du dépôt actif du radium, par chauffage électrique.

La plaque est disposée parallèlement au plan du disque dont elle n'est distante que de 6.10^{-2} mm; le segment R est à 0,2 mm du disque (cotes en millimètres).

Par l'étude de cette décroissance, par dénombrement des traces sur des bandes étroites PQP'Q' perpendiculaires à la vitesse, nous montrerons plus loin qu'il est facile de déterminer la période.

1. **Conduite des expériences.** — L'activation du ruban a été obtenue dans une chambre cylindrique à ionisation C (*fig.* 2), dans laquelle, après y avoir fait le vide, on a introduit par aspiration le radon qui était en équilibre radioactif avec une solution de 15 mg de radium.

L'activation sous tension ($V = -1200$ V), a été prolongée pendant 3 h.

Pour réaliser au mieux la localisation du dépôt actif sur la région médiane R du ruban, il a été prévu de disposer cette portion du ruban devant l'ouverture O d'une sorte d'alcôve métallique réunie à la masse; les lignes de force du champ électrique qui traversent la chambre aboutissent à la seule fraction médiane du ruban. Une lame mince de mica *m*, percée d'un trou central évite l'amorçage d'une effluve entre le ruban et les parois de l'alcôve; d'ailleurs il est intercalé une résistance de 1 MΩ sur le circuit de tension pour éviter l'amorçage d'un arc.

Lorsque le ruban est activé, on fait le vide dans la chambre de façon à évacuer l'émanation, on y laisse rentrer l'air puis on retire le bouchon B en faisant pivoter la lame élastique ρ; le bouchon trouve immédiatement son logement dans un support disposé à cet effet sur la plate-forme du ciné-nucléographe; la portion centrale R du ruban est ainsi amenée à une distance de 0,2 mm au-dessus du

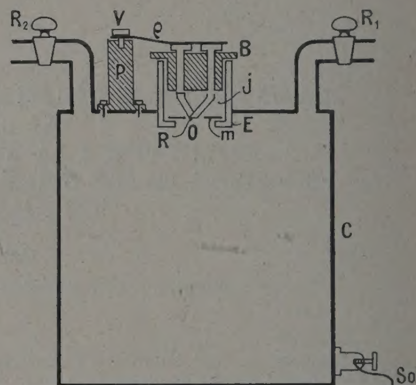


Fig. 2.

disque mobile et à une distance de 68 mm de l'axe de rotation.

La réalisation de ces divers dispositifs extrêmement commodes qui ont permis de rendre très rapides les différentes manœuvres expérimentales est due à M. Marcel Frilley que je suis heureux de remercier ici.

Lorsque le ruban est en place, on met en marche le moteur d'entraînement du disque; lorsque le disque a atteint la vitesse de rotation désirée (100 t/s), ce qui est contrôlé avec précision par un dispositif d'éclairage stroboscopique (tube au néon à travers un verre rouge), on amène la plaque au-dessus du disque par rotation du châssis qui la supporte.

Pour le chauffage du ruban de platine (longueur : 30 mm, largeur : 2 mm, épaisseur : 0,1 mm), on avait déterminé par des essais préliminaires l'intensité du courant électrique nécessaire pour porter au rouge sombre (environ 700°) le segment central du ruban dont la largeur est réduite à 1 mm.

La vitesse de rotation du disque étant maintenue constante sous contrôle stroboscopique, on établit le courant de chauffage du ruban, on l'amène rapidement et on le maintient à l'intensité préalablement déterminée (14 A) pendant le temps désiré (2s).

On voit qu'il y a lieu d'admettre : 1° en raison de la faible surface du segment médian du ruban et

de sa proximité du disque que le radium C' volatilisé se fixe sur une plage de dimensions réduites, au maximum quelques millimètres carrés; 2° en raison de la brièveté du chauffage, que la volatilisation du RaB et celle du RaC seront négligeables; ce que l'expérience confirmera.

2. **Répartition des traces sur la plaque.** — La source de Radium C', obtenue par vaporisation sélective du dépôt actif du radium, est donc entraînée avec une vitesse v dans un plan parallèle à une plaque photographique nucléaire; la distance h entre la plaque et le plan est de quelques centièmes de millimètres.

Nous nous proposons de trouver la répartition sur la plaque des traces des rayons émis par la source mobile pendant son passage sous la plaque.

De façon plus précise, étant donnée une plaque rectangulaire dont l'un des bords BB′ est disposé perpendiculairement à la vitesse (*fig.* 3), nous nous

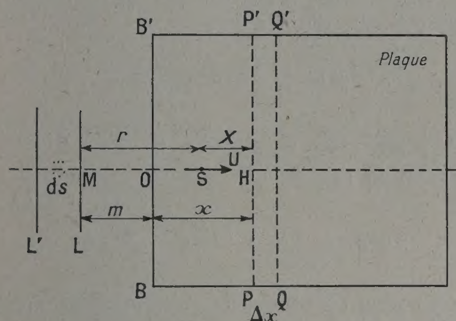


Fig. 3.

proposons de trouver, en fonction de sa distance x au bord BB′, l'expression du nombre Δn_x des traces situées dans une bande telle que PQP′Q′, de hauteur PP′ indéfinie et de largeur PQ $= \Delta x$ dans le sens de la vitesse.

A priori, cette expression dépend de la vitesse d'entraînement de la source, de la distance h (en raison de la dispersion angulaire des rayons), de la période ou de la vie moyenne du radium C' et, enfin, éventuellement de la répartition des atomes de radium C' qui constituent la source déposée par vaporisation sur le tapis mobile.

Cette répartition est inconnue, mais nous allons montrer que sa connaissance n'est pas utile pour prévoir la répartition des traces sur une plage de plaque, pourvu que cette plage soit suffisamment éloignée de la zone où les atomes de radium C' vaporisés viennent atteindre le disque mobile et s'y fixer.

En effet, le segment médian R du ruban, seul utile, parce que seul porté à une température élevée (du fait qu'il est médian et que les extrémités sont refroidies par le contact avec les amenées massives de courant et aussi du fait que nous avons pris soin d'en augmenter la résistance électrique en en diminuant la largeur) est disposé très près du disque mobile (à une distance de 2/10e mm); en raison de cette proximité, il y a lieu d'admettre que les atomes de radium C' ou tout au moins la très grande majorité d'entre eux se trouvent localisés à l'intérieur d'une bande L′L, normale à la vitesse (*fig.* 3) et dont la largeur est au maximum de quelques millimètres.

On conçoit que si le bord BB′ de la plaque, située en aval de la bande L′L, en est suffisamment éloigné, la probabilité d'atteindre la plaque pour un rayon α provenant d'une source élémentaire de radium C', située n'importe où dans la bande L′L, devienne négligeable. On peut, par exemple, disposer la plaque de façon que son bord BB′ soit à une distance m de la ligne frontière L, telle que la probabilité d'atteindre la plaque pour des rayons issus de sources élémentaires situées sur L, soit seulement de 0,5 pour 100 et, par suite, inférieure à 0,5 pour 100 pour des rayons issus de sources élémentaires situées en amont de L.

Si donc l'on consent à une incertitude portant sur moins de 1 pour 100 des traces, on pourra ne tenir compte de l'activité de rayonnement d'une source élémentaire, quelle que soit sa situation initiale dans la bande L′L, qu'à partir de l'instant où elle franchit la ligne frontière L, avec une activité que nous désignerons par $\mathrm{d}a_L$.

Le même raisonnement s'appliquant à toutes les sources élémentaires, l'activité de chacune d'elle décroissant en fonction du temps suivant la même loi exponentielle et les traces que fournissent leurs rayons s'ajoutant sur la plaque, il y a lieu d'admettre qu'au point de vue de la répartition des traces par bandes, tout se passera comme si l'ensemble des atomes vaporisés constituait une source « linéaire » perpendiculaire à la vitesse dont l'activité serait la somme

$$a_L = \sum \mathrm{d}a_L$$

des activités de toutes les sources élémentaires à l'instant où chacune d'elles, entraînée par le disque mobile, franchit la ligne frontière L.

La détermination de la distance minima m à laquelle il convient de placer le bord BB′ de la plaque pour que la proportion des rayons provenant de sources situées sur L et atteignant la plaque soit inférieure ou au plus égale à une valeur choisie, par exemple 1/200e, peut être obtenue comme suit :

Rappelons que l'angle solide sous lequel on voit d'un point S, situé à une distance SM $= h$ (*fig.* 4) d'un plan, une bande rectangulaire PQP′Q′ situé à une distance X de l'aplomb M du point S et de largeur dX est

$$\mathrm{d}\omega_X = 2\,\frac{h\,\mathrm{d}X}{X^2 + h^2}. \qquad (1)$$

Si une source radioactive élémentaire (quasi ponctuelle) possède une activité da (dans un angle solide 2π) à l'instant t de son passage en S, le nombre de rayons envoyés par elle sur cette bande, de l'instant t à l'instant $t + dt$ est

$$d^2 n_{Xt} = \frac{d\omega_X}{2\pi} da\, dt,$$

soit, d'après (1),

$$d^2 n_{Xt} = \frac{1}{\pi} da\, dt \frac{h\, dX}{X^2 + h^2}. \qquad (2)$$

Il en résulte que le nombre de rayons envoyés pendant le même intervalle de temps sur une plage

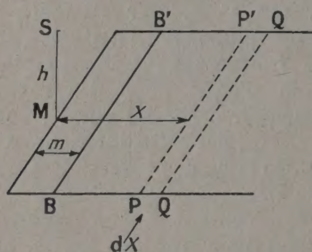


Fig. 4.

indéfinie s'étendant au-delà d'une ligne BB' située à une distance MO $= m$ est

$$dn_t = \frac{1}{\pi} da\, dt \int_m^\infty \frac{h\, dX}{X^2 + h^2},$$

soit

$$dn_t = \frac{1}{\pi} da\, dt \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{m}{h}\right],$$

on remarque que

$$\frac{dn_t}{da\, dt} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{m}{h}\right)$$

représente le rapport du nombre des rayons qui atteignent la plage au-delà de BB' au nombre total des rayons émis par la source de l'instant t à l'instant $t + dt$.

Ce rapport ne dépend que de $\frac{m}{h}$ et l'on peut, pour chaque valeur de h choisir m de telle façon qu'il soit inférieur ou au plus égal à une valeur choisie. Si, par exemple, nous choisissons $\frac{m}{h}$ de façon que arc $\operatorname{tg}\frac{m}{h} \geqq \frac{99}{100}\frac{\pi}{2}$, $\frac{dn_t}{da\, dt}$ sera inférieur ou au plus égale à $1/200$. Pour que

$$\operatorname{tg}\frac{m}{h} \geqq \frac{99}{100}\frac{\pi}{2},$$

il faut

$$\frac{m}{h} \geqq 63 \qquad \text{ou} \qquad m \geqq 63h.$$

Dans l'expérience telle que réalisée, la plaque est disposée parallèlement au plan du disque et à une distance $h = 6.10^{-2}$ mm, il résulte du calcul précédent qu'en disposant le bord BB' de la plaque en aval de la ligne frontière L à une distance $m \geqq 63$ h ou $m \geqq 4$ mm, on pourra, du point de vue de la répartition des traces sur la plaque, considérer que cette répartition est produite par une source linéaire fictive, parallèle au bord de la plaque et d'activité a_L, à l'instant où elle coïncide avec la ligne frontière L de la zone de dépôt des atomes de radium C' volatilisés et fixés sur le plan du disque.

Prenons cet instant comme origine des temps, à l'instant t, cette source fictive se trouvera (*fig.* 3) à une distance MS $= r = vt$ et son activité sera

$$a_t = a_L e^{-\frac{t}{\theta}} \qquad \text{ou} \qquad a_t = a_L e^{-\frac{r}{v\theta}}. \qquad (3)$$

Le nombre de rayons émis par cette source de l'instant t à l'instant $t+dt$ sur une bande PQP'Q' de largeur Δx et située à une distance X de l'aplomb M du point S est, d'après (2),

$$d^2 n_{Xt} = \frac{1}{\pi} a_t\, dt \frac{h\, \Delta x}{X^2 + h^2}$$

tenant compte de ce que $r = vt$, d'où $dt = \frac{dr}{v}$ et de la relation (3), on a

$$d^2 n_{Xr} = \frac{1}{\pi} a_L e^{-\frac{r}{v\theta}} \frac{h}{v} dr \frac{\Delta x}{X^2 + h^2}. \qquad (4)$$

Il sera plus commode de rapporter les positions au bord de la plaque, posons

$$\overline{OH} = x = \overline{MH} - \overline{MO},$$

soit

$$x = r + X - m,$$

d'où

$$r = x - X + m \qquad \text{et} \qquad dr = -dX,$$

l'équation (4) devient

$$d^2 n_{Xx} = -\frac{1}{\pi} a_L \frac{h}{v} e^{-\frac{x - X + m}{v\theta}} \Delta x \frac{dX}{X^2 + h^2}$$

ou

$$d^2 n_{Xx} = -\left[\frac{1}{\pi} a_L \frac{h}{v} e^{-\frac{m}{v\theta}}\right] e^{-\frac{x}{v\theta}} \Delta x \frac{e^{\frac{X}{v\theta}}\, dX}{X^2 + h^2}.$$

En remarquant que le terme entre parenthèses est une constante, soit C, on obtient ; en posant $Y = \frac{e^{\frac{X}{v\theta}}}{X^2 + h^2}$

$$d^2 n_{Xx} = -C e^{-\frac{x}{v\theta}} \Delta x\, Y\, dX.$$

Lorsque la source fictive se déplacera depuis la ligne L jusqu'à l'infini, le nombre des traces sur la

bande PQP'Q', de largeur Δx et située à la distance x du bord BB' de la plaque sera

$$dn_x = -C\,e^{-\frac{x}{v\theta}}\Delta x \int_{-(x+m)}^{\infty} Y\,dX,$$

ce que l'on peut écrire

$$dn_x = -C\,e^{-\frac{x}{v\theta}}\Delta x \left[\int_{-(x+m)}^{0} Y\,dX + \int_{0}^{\infty} Y\,dX\right],$$

la seconde intégrale définie est une constante, soit J sa valeur

$$dn_x = C\,e^{-\frac{x}{v\theta}}\Delta x \left[\int_{0}^{x+m} Y\,dX - J\right]. \qquad (5)$$

Faute de pouvoir intégrer, étudions les variations de la fonction Y entre $X = 0$ et $X = m + x$.

La dérivée

$$Y'_X = \frac{1}{v\theta}\,Y\,\frac{X^2 - 2v\theta + h^2}{X^2 + h^2}$$

s'annule pour

$$X = v\theta\left[1 \pm \left(1 - \frac{h^2}{v^2\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Dans les conditions de l'expérience $h = 6.10^{-2}$ mm, $v \approx 4.10^4$ mm/s; les déterminations antérieures de la vie moyenne du radium C'_2 ont donné : $\theta \approx 2.10^{-4}$ s; on aura donc

$$v\theta \approx 8, \qquad \text{d'où} \quad \frac{h}{v\theta} \approx 0{,}75.10^{-2};$$

$\left(\frac{h}{v\theta}\right)^2$ est donc très petit devant l'unité; les racines sont donc sensiblement

$$X = v\theta\left[1 \pm \left(1 - \frac{h^2}{2v^2\theta^2}\right)\right],$$

soit

$$X_1 \approx \frac{h^2}{2v\theta} \qquad \text{et} \qquad X_2 \approx 2v\theta - \frac{h^2}{2v\theta}.$$

Dans les conditions de l'expérience, X_1 est voisin de zéro et $X_2 \approx 2v\theta$, soit 16 mm.

Le maximum Y_M est voisin de $\frac{1}{h^2}$, soit de 3 000 et le minimum $Y_m \approx \frac{e^2}{4v^2\theta^2}$, soit 0,03.

On remarque que le minimum de Y est très petit par rapport à son maximum et l'on peut voir d'ailleurs que ce minimum est très aplati; en effet, pour $X = v\theta$, $Y \approx 0{,}04$ et pour $X = 4v\theta$, $\approx 0{,}05$.

Par ailleurs, la relation (5) peut s'écrire

$$dn_x = C\,e^{-\frac{x}{v\theta}}\Delta x \left[\int_0^m Y\,dX\left[1 + \frac{\int_m^{m+x} Y\,dX}{\int_0^m Y\,dX}\right] - J\right].$$

Sous cette forme, on voit que si l'on choisit pour m, c'est-à-dire pour la distance du bord BB' de la plaque à la ligne frontière L, une valeur voisine de $2v\theta$, soit de 16 mm, le quotient des deux intégrales sera négligeable devant l'unité pourvu que $x \leq 4v\theta$.

On aura donc

$$dn_x \approx C\,e^{-\frac{x}{v\theta}}\Delta x \left[\int_0^m Y\,dX - J\right],$$

la parenthèse est indépendante de x; on pourra donc poser

$$\boxed{dn_x \approx K\,e^{-\frac{x}{v\theta}}\Delta x.} \qquad (6)$$

C'est-à-dire que le nombre dn_x des traces portées par des bandes d'égales largeurs Δx sera une fonction exponentielle décroissante de leur distance x au bord de la plaque à condition que celui-ci ait été placé à une distance voisine de $2v\theta$ (16 mm) de la ligne frontière L du dépôt volatilisé de radium C'.

La position de cette ligne frontière n'est pas connue avec exactitude, mais en raison de la proximité (2/10e mm) du segment central du ruban du disque, il y a tout lieu de supposer qu'elle se trouve approximativement à 1 ou 2 mm de l'aplomb du centre du ruban. Ces considérations nous ont conduit à placer le bord de la plaque à 18 mm de l'aplomb du segment central du ruban.

La relation (6) peut s'écrire :

$$\log dn_x = [\log K + \log \Delta x] - \frac{0{,}434}{v\theta}\,x. \qquad (7)$$

Les conditions théoriques ci-dessus développées conduisent donc à prévoir qu'en portant en abscisses les distances des bandes explorées au bord de la plaque et en ordonnées les logarithmes des nombres de traces observées sur des bandes d'égale largeur, on doit trouver une droite dont la pente a pour expression

$$p = -\frac{0{,}434}{v\theta}. \qquad (8)$$

Le dénombrement des traces portées sur des bandes, perpendiculaires à la vitesse, de largeurs égales au diamètre du champ du microscope (150 μ), a été fait par Mme Odette Goussu que je suis heureux de remercier ici. Ce dénombrement a été rendu facile grâce au dispositif dû à M. Marcel Frilley qui permet de déplacer la plaque sous l'objectif du microscope normalement à la trajectoire décrite par la source.

Les résultats des dénombrements sont rassemblés dans le tableau ci-après.

Dans la première colonne sont indiquées les distances x des bandes au bord BB' de la plaque; dans la deuxième, les nombres dn_x des traces α

observées. Le point milieu du ruban se trouvait à une distance $r = 1682$ mm de l'axe de rotation; le disque tournait à 100 t/s; la vitesse de la source de radium C' était donc

$$v = 2\pi r . 100 = 42\,704 \text{ mm/s.}$$

Les nombres inscrits dans la première et la troisième colonne conduisent au graphique représenté

TABLEAU I.

x (mm).	dn_x.	$\log(dn_x)$.
1	533	2,73
3	335	2,52
4	280	2,45
5	236	2,37
7	251	2,40
8	199	2,30
8,5	194	2,29
10	147	2,17
12	121	2,08
13	141	2,15
14	104	2,02
15	110	2,04
16	98	1,99
16,5	95	1,98
18	84	1,92
19	78	1,89
21	65	1,81
22	56	1,75
24	52	1,72
25	45	1,65
28	23	1,36
30	15	1,18
31	20	1,30

figure 4; on voit que les points se placent remarquablement suivant une droite, conformément à la relation (7) théoriquement prévue.

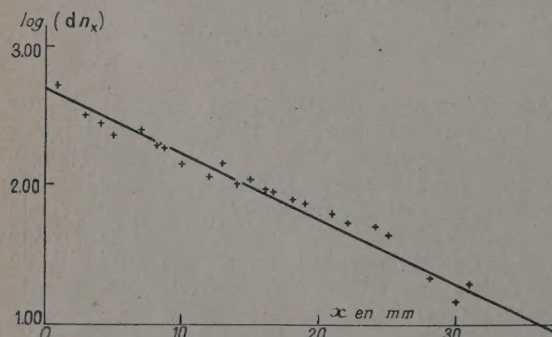


Fig. 5.

Sur la figure 5, on a tracé « au mieux » la droite qui correspondrait à la répartition la plus probable des traces. La pente graphique de cette droite est

$$p_{\text{exp}} = \frac{1,7}{36,4} = \frac{1}{21,4}.$$

En égalant cette valeur expérimentale à la valeur théorique (8), on obtient

$$\theta = \frac{0,434}{v}\,\frac{1}{p_{\text{exp}}}, \qquad \text{soit} \quad \theta = \frac{0,434}{42\,704}\,21,4, \qquad (9)$$

c'est-à-dire

$$\theta = 2.18.10^{-4} \text{ s},$$

mais la période de T est liée à la vie moyenne θ par la relation $T = 0,693\,\theta$, d'où

$$\boxed{T = 1,50.10^{-4} \text{ s.}}$$

Ce résultat est en remarquable accord avec les déterminations antérieures.

L'enregistrement des traces a porté sur environ 7.10^{-4} s, c'est-à-dire sur environ 5 périodes.

Il n'y a pas lieu de s'étonner du fait que les points expérimentaux ne se placent pas rigoureusement sur une droite; de tels écarts devaient être prévus en raison des fluctuations dans l'émission radioactive; il est également naturel que les écarts s'exagèrent lorsque x augmente, le dénombrement portant sur un nombre de plus en plus petit de traces.

On remarquera que la plaque ayant 40 mm de largeur et la largeur des bandes explorées étant égale au diamètre du champ du microscope, soit à 150 μ, on aurait pu faire porter le dénombrement sur $\frac{40\,000}{150}$, soit environ 250 bandes, c'est-à-dire déterminer la droite par 250 points. Il ne nous a pas paru utile de prendre la peine d'un dénombrement aussi complet, notre but étant moins de déterminer la période du radium C', déjà connue avec précision, que d'établir la validité de la méthode cinénucléographique en vue de déterminations de périodes encore inconnues.

Remarquons enfin que le fait que la décroissance est bien exponentielle, comme le prévoit la théorie, démontre qu'il n'y a pas eu de radium B ou de radium C volatilisé sur le disque car, par désintégration, ces corps auraient donné naissance à une source de radium C' d'activité constante pendant le temps de son passage sous la plaque.

En fait, il subsiste sur la plaque, après une décroissance de 5 périodes une activité résiduelle (une dizaine de traces α par bande). On peut l'attribuer, soit à une véritable vaporisation des radium B ou C, soit à un entraînement de ces corps par la vaporisation du RaC'.

Il n'y a pas lieu d'en tenir compte, si, pour la détermination de la période du RaC, on n'utilise que le début de la décroissance : nous n'avons

utilisé pour tracer la droite que les points relatifs aux quatre premières périodes, pendant lesquelles l'activité résiduelle est « relativement » négligeable.

3. Généralisation éventuelle de l'application de la méthode ciné-nucléographique : détermination des périodes des radioéléments artificiels. — Il nous apparaît qu'il y a lieu d'espérer étendre à la détermination des périodes des radioéléments artificiels la méthode ciné-nucléographique dont la validité se trouve établie par la concordance du résultat auquel elle a conduit dans le cas du radium C' avec les déterminations antérieures.

Pour déterminer par ciné-nucléographie la période d'un radioélément A, dont on sait qu'il est obtenu par bombardement d'une cible de nombre atomique Z par un rayonnement R, il suffirait de donner naissance à l'élément A, en irradiant avec un faisceau étroit de rayons R, la périphérie du disque mobile qui serait formée de l'élément Z ou qui, plus simplement, porterait une piste circulaire formée de cet élément; ainsi, par exemple, un faisceau étroit de rayons α bombardant une piste de magnésium donnerait naissance à une source de radiosilicium.

Une irradiation continue donnerait naissance de façon continue au radioélément à étudier, aussitôt entraîné sous la plaque. La durée de l'expérience serait choisie en fonction de l'activité de la source du radioélément et la vitesse de rotation serait choisie en fonction de sa période.

Il reste à vérifier toutefois que cette méthode, théoriquement très générale et dont la mise en œuvre serait d'une très grande simplicité, est expérimentalement applicable en raison des difficultés que présente le dénombrement des traces des rayons émis par les radioéléments artificiels.

On sait, par exemple, que les traces des rayons électroniques sont d'une observation beaucoup plus difficile que celle des rayons α, surtout dans certains domaines d'énergie. Il semble toutefois que si, du fait de leur répartition d'énergie, une certaine fraction des électrons émis (soit trop lents, soit trop rapides) échappe au dénombrement, la décroissance exponentielle de la densité des traces sur la plaque puisse être cependant mise en évidence et servir à la détermination de la période, puisque la répartition énergétique des électrons émis est « indépendante » de l'activité instantanée de la source et qu'il suffit que le dénombrement des traces porte sur une « même » fraction efficace du nombre total des rayons.

Il nous apparaît d'une grande importance de vérifier si la méthode ciné-nucléographique peut être appliquée à la détermination des périodes des radioéléments artificiels, notamment dans le domaine

$$10^{-2} \geqq T \geqq 10^{-4} \text{ s},$$

où les méthodes par compteur sont moins précises.

Nous espérons fournir dans un proche avenir une réponse expérimentale à ces questions.

Manuscrit reçu le 15 avril 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] LAPORTE M. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **237**, 889; *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 705.
FRILLEY M. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 715.
GOUSSU O. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 716.
LAPORTE M. — Mesure par Ciné-nucléographie de la période du thorium C' (*J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 659).

[2] WALCHSHOFER L. — *Wien Ber.*, 1929, **138**, 363.
BUSSECKER E. — *Wien Ber.*, 1928.
RONA E. — *Wien Ber.*, 1932.
BONET-MAURY P. — *Ann. Phys.*, 1929, **11**, 255.

EXAMEN CRITIQUE DE LA THÉORIE DES PLASMAS BASÉE SUR LE LIBRE PARCOURS MOYEN, A LA LUMIÈRE DE LA MÉTHODE FONDÉE SUR LA FONCTION DE DISTRIBUTION SOLUTION DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN

Par R. JANCEL et T. KAHAN,
Institut Henri Poincaré, Sorbonne.

Sommaire. — On montre la supériorité incontestable de la méthode des fonctions de distribution sur celle du libre parcours moyen en examinant divers exemples caractéristiques choisis dans la théorie des plasmas et en mettant en relief les déficiences manifestes de la méthode du libre parcours moyen. Au cours de cette étude on reprend, en outre, diverses objections soulevées à propos de résultats antérieurs obtenus par les auteurs.

Au cours d'un travail en préparation sur la nature des solutions proposées jusqu'à maintenant pour la résolution de l'équation intégro-différentielle de Boltzmann et sur les hypothèses qui leur servent de fondement, nous avons été amenés à préciser la validité des approximations admises explicitement par la théorie des distributions et dissimulées dans la théorie du libre parcours moyen (l.p.m.). Notre discussion portera donc exclusivement sur l'application des deux méthodes au calcul de la conductivité dans les plasmas anisotropes (c'est-à-dire soumis à un champ électrique **E** constant ou oscillant et à un champ magnétique **H**).

Nous nous proposons en particulier d'établir dans cet article que la théorie du l.p.m. comporte des hypothèses implicites mises en relief par Cowling [4] et explicitées par Huxley [5] pour les champs alternatifs; que les résultats obtenus par cette théorie sont d'ailleurs difficiles à utiliser physiquement.

1. Considérons donc un gaz binaire et affectons des indices 1 et 2 les diverses grandeurs relatives aux deux constituants; nous supposerons que le courant de conduction est purement ohmique, ce qui ne nuit pas à la généralité des raisonnements (on néglige le gradient de pression, de température, etc.). Le courant de conduction **I** est alors :

$$\mathbf{I} = \frac{n_1 n_2}{\rho}(e_1 m_2 - e_2 m_1)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2), \tag{1}$$

où $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ sont les vitesses de diffusion respectives des deux constituants et

$$\rho = n_1 m_1 + n_2 m_2.$$

Pour un gaz lorentzien on a simplement

$$\mathbf{I} \neq - n_2 e_2(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \neq n_2 e_2 \mathbf{w}_2. \tag{2}$$

La méthode du l.p.m. utilise les équations du mouvement d'une particule chargée sous l'effet de la force de Lorentz qui s'écrivent sous forme vectorielle :

$$m\boldsymbol{\Gamma} = e\mathbf{E} + e(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}). \tag{3}$$

Comme notre intention est de mettre en relief les différences entre la théorie des distributions et celle du l.p.m., nous allons nous borner au cas où **H** est normal à **E**.

En reprenant la méthode de Chapman et Cowling [5], on peut déduire de (3)

$$\mathbf{w}_k = \frac{\tau_k \dfrac{e_k \mathbf{E}}{m_k} - \dfrac{e_k \omega_k}{m_k H}\tau_k^2(\mathbf{H} \wedge \mathbf{E})}{1 + \omega_k^2 \tau_k^2}, \tag{4}$$

où τ_k est l'intervalle de temps moyen entre les chocs successifs subis par une particule du $k^{\text{ième}}$ gaz, ω_k la gyrofréquence $\dfrac{e_k H}{m_k}$. Pour obtenir ce résultat, on fait l'hypothèse essentielle que τ_k est indépendant de la vitesse moléculaire $\mathbf{v}_k$. Le courant de conduction **I** s'exprime donc comme la différence d'expressions de la forme (4), où n'interviennent que des grandeurs appartenant au $k^{\text{ième}}$ gaz. On a dans le cas lorentzien :

$$\mathbf{I} = \frac{n_2 e_2^2}{m_2}\left\{\frac{\tau_2 \mathbf{E} - \dfrac{\omega_2}{H}\tau_2^2(\mathbf{H} \wedge \mathbf{E})}{1 + \omega_2^2 \tau_2^2}\right\}. \tag{5}$$

Si nous appliquons maintenant la méthode des fonctions de distribution, on obtient en première approximation (en supposant que la fonction de distribution d'ordre zéro est maxwellienne) pour la différence $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ l'expression :

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 m_2}\left\{\frac{\tau\mathbf{E} - \dfrac{\omega}{H}\tau^2(\mathbf{H} \wedge \mathbf{E})}{1 + \omega^2 \tau^2}\right\}, \tag{6}$$

avec

$$\omega = \frac{\omega_1 \rho_2 + \omega_2 \rho_1}{\rho}, \qquad \tau = \frac{\tau_1 \rho_2 + \tau_2 \rho_1}{\rho} \quad \text{et} \quad \rho = n_1 m_1 + n_2 m_2. \tag{7}$$

Remarquons immédiatement sur les formules (4) et (6) que la théorie du l.p.m. fait apparaître des termes relatifs à chacune des composantes, alors que la théorie des distributions fait intervenir pour la vitesse de différence d'un constituant, les grandeurs relatives à l'autre constituant. On calcule, en effet, cette vitesse de diffusion à l'aide de l'équation (6) et de la relation

$$\sum_k \rho_k \mathbf{w}_k = 0 \tag{8}$$

et nous voyons de plus que ce sont les moyennes pondérées de gyrofréquences ω_k et des libres parcours ω_k qui déterminent chacun des $\mathbf{w}_k$. Il en résulte des différences notables entre les résultats obtenus par les deux théories dans le cas d'un gaz binaire, qui ont été mises en relief par Cowling et que nous allons rappeler ici brièvement.

La divergence des résultats entre (5) et (6) est particulièrement sensible si l'on se place dans le cas où

$$n_1 = n_2, \qquad m_1 = m_2 \qquad \text{et} \qquad e_1 = -e_2;$$

l'équation (7) donne alors $\omega = 0$ et l'on voit, d'après (6) qu'il n'y a pas de diffusion transverse mais seulement une diffusion directe qui n'est pas affectée par la présence du champ magnétique. Les particules des deux gaz subissent, en effet, des accélérations égales en grandeur et direction en raison de leur vitesse de diffusion égale et opposée dans le champ magnétique. Celui-ci produit donc une accélération du gaz dans son ensemble et il ne modifie la diffusion d'un des constituants relativement à l'autre que par l'intermédiaire de la réaction du changement de la vitesse d'ensemble sur les forces responsables de la diffusion.

Par contre, la théorie du l.p.m. fait apparaître une diffusion transverse et une réduction de la diffusion directe : il confond ainsi les effets du mouvement d'ensemble avec la diffusion. Dans ce cas, en effet, cette méthode admet tacitement que le gaz n'est pas accéléré : elle calcule la vitesse moyenne des molécules en un point donné, en les groupant suivant la vitesse au commencement d'un libre parcours et, en procédant ainsi, elle ne fait aucune distinction entre les valeurs de la vitesse d'ensemble au début du libre parcours et à l'instant considéré. Ceci explique pour le cas d'un gaz accéléré la divergence avec la théorie des distributions où l'on tient compte d'une accélération (tout en supposant qu'elle ne produit que de faibles variations de la vitesse d'ensemble sur un libre parcours), mais les résultats des deux théories sont loin d'être concordants pour un gaz non accéléré.

D'une manière générale, Cowling a montré que le désaccord entre les deux théories provient de l'hypothèse implicite suivante dans la méthode du l.p.m. : on admet que la vitesse moyenne d'une particule, après un choc, est égale à la vitesse d'ensemble du gaz. Cette hypothèse, qui conduit à négliger les chocs entre particules identiques, n'est pas valable davantage pour des chocs entre particules différentes. En effet, si $\mathbf{v}'$ désigne la vitesse moyenne des particules m_1 et m_2 après un choc, $\mathbf{v}'$ satisfait à l'équation de conservation de l'impulsion

$$(m_1 + m_2)\mathbf{v}' = m_1 \overline{\mathbf{v}}_1 + m_2 \overline{\mathbf{v}}_2 \tag{9}$$

et diffère donc, en général, de la vitesse d'ensemble $\mathbf{v}_0$ définie par :

$$\rho \mathbf{v}_0 = \rho_1 \overline{\mathbf{v}}_1 + \rho_2 \overline{\mathbf{v}}_2. \tag{10}$$

Dans le cas d'un gaz binaire non accéléré, on peut alors lever le désaccord entre les deux théories en s'appuyant sur la remarque précédente : il faut supposer pour cela que la vitesse moyenne des molécules après le choc n'est pas nulle mais égale à $\mathbf{v}'$ donnée par (9) (pour un gaz non accéléré on peut supposer $\mathbf{v}_0 = 0$). Ceci introduit une complication supplémentaire dans la théorie du l.p.m. qui lui enlève sa simplicité apparente.

Si nous examinons maintenant le cas d'un gaz lorentzien, on voit facilement d'après (7) que

$$\rho = \rho_1, \qquad \tau = \tau_2 \qquad \text{et} \qquad \omega = \omega_2;$$

il s'ensuit que, dans ce cas particulier, les résultats des deux théories sont concordants. Mais il est essentiel de remarquer que la théorie du l.p.m. est incapable de fournir par elle-même une méthode d'évaluation de τ sans avoir recours à la théorie des distributions; et celle-ci montre que τ dépend de la loi d'interaction entre les particules d'une manière telle que la théorie du l.p.m. ne peut en rendre compte. Cette remarque enlève beaucoup de son intérêt à la théorie du l.p.m. dès qu'on veut obtenir des résultats physiques et elle montre aussi que cette dernière théorie peut conduire facilement, par ses hypothèses implicites et ses concepts mal définis, à des raisonnements erronés.

Nous allons maintenant examiner l'application de la méthode du l.p.m. à des plasmas lorentziens soumis à un champ électrique alternatif. Nous étudierons les hypothèses faites par Huxley dans un Mémoire [5] où se trouvent rectifiés des résultats antérieurs établis par le même auteur (si nous préférons discuter ici ce Mémoire, c'est parce qu'une partie des hypothèses admises s'y trouve explicitement mentionnée). Pour établir les formules concernant la conductivité dans un gaz, Huxley admet, entre autres, l'hypothèse suivante : la vitesse d'agitation moyenne $\mathbf{v}_2$ des électrons et la

distribution de ces vitesses ne changent pas sensiblement durant l'intervalle de temps considéré. Aussi ces formules ne s'appliquent qu'aux situations suivantes :

a. déplacement dans un champ tel que le rapport de l'intensité de ce champ à la pression soit petit de sorte que les électrons conservent leur énergie d'agitation thermique;

b. déplacement dans un champ continu, après un temps t suffisamment long pour que l'énergie d'agitation thermique $\frac{1}{2} m\overline{v_2^2}$ soit constante;

c. déplacement sous l'effet d'un champ alternatif dont la pulsation ω est suffisamment grande par rapport au temps de relaxation de l'énergie $\frac{1}{2} m\overline{v_2^2}$, de sorte que la fluctuation de $\frac{1}{2} m\overline{v_2^2}$ autour de sa valeur moyenne pendant une période du champ alternatif soit relativement négligeable.

Remarquons aussi avec Huxley que, dans cette théorie, le l.p.m. est indépendant du mode d'interaction entre les constituants du plasma et que ce fait interdit à cette méthode de fournir des renseignements sur l'énergie moyenne perdue par un électron au cours des chocs avec les autres molécules.

Dans ces conditions, Huxley donne les formules suivantes pour le tenseur de conductivité :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \frac{n_2 e^2}{3 m_2}[S - id], \\ \sigma_{zz} &= \frac{2 n_2 e^2}{3 m_2}[F(p, \nu) - if(p, \nu)], \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

où

$$S[\omega, p, \nu] \equiv F[(\omega + p), \nu] + F[(\omega - p), \nu],$$
$$d[\omega, p, \nu] \equiv f[(\omega + p), \nu] - f[(\omega - p), \nu].$$

Les expressions générales de F et f sont données d'après Huxley par

$$\left.\begin{aligned} F[(\omega - p), \nu] &\equiv \overline{\frac{\nu}{\nu^2 + (\omega - p)^2}\left\{1 + \frac{(\omega - p)^2}{\nu^2 + (\omega - p)^2}\right\}}, \\ f[(\omega - p), \nu] &\equiv \overline{\frac{\omega - p}{\nu^2 + (\omega - p)^2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{(\omega - p)}{\nu^2 + (\omega - p)^2}\right\}}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

où les valeurs moyennes dans (12) sont prises par rapport à une fonction de distribution inconnue. La grandeur ν doit alors être considérée comme fonction de v_2 contrairement aux hypothèses de départ de la théorie : de sorte que cette méthode de calcul revient à considérer les expressions obtenues à l'aide de la théorie du l.p.m. comme si elles étaient indépendantes de la fonction de distribution; on pourrait ensuite prendre les valeurs moyennes de ces expressions par une fonction de distribution quelconque. Mais ceci est en contradiction formelle avec le fait que tous les raisonnements de la théorie du l.p.m. reposent sur des grandeurs (fréquence de collision ν, libre parcours moyen, etc.) qui ne sont définies avec précision qu'en fonction d'une certaine fonction de distribution à déterminer. On est donc en droit de se demander si les expressions (12) ont un intérêt physique et même quelle est leur signification réelle. Nous allons d'ailleurs reprendre cette question dans le paragraphe suivant.

2. Pour éviter ces difficultés et afin de pouvoir décrire les échanges d'énergie entre les électrons et la composante lourde du plasma, nous avons été amenés à développer une théorie non maxwellienne des plasmas anisotropes : celle-ci utilise l'équation intégro-différentielle de Boltzmann avec un développement approprié de la fonction de distribution Nous avons d'abord développé cette méthode pour $\mathbf{H}$ petit ou perpendiculaire à $\mathbf{E}$[2] [ce qui revenait à négliger un terme en $\mathbf{H}_0 \wedge \mathbf{H}_0 \wedge \mathbf{E}$]. MM. Bayet, Delcroix et Denisse ont proposé, dans une Note, une méthode pour évaluer l'ordre de grandeur de ce terme : ils utilisent dans ce but un développement de la fonction de distribution en fonction de $\frac{\omega_H}{\nu}$. Remarquons avant tout que le développement utilisé par nous ne procède pas suivant les puissances des champs et n'a, *a priori*, rien à voir avec l'ordre de grandeur de ceux-ci : dans notre méthode, ce développement est effectué suivant les approximations successives de la fonction de distribution; l'intensité des champs n'est mise en évidence que pour rendre compte d'un écart possible de l'état du plasma par rapport à l'état maxwellien, de sorte qu'en général le premier terme (approximation zéro dans nos notations) représente déjà une distribution non maxwellienne due précisément à la présence de champs extérieurs assez intenses. Ajoutons quun tel développement est justifié *a posteriori* si l'on remarque que la contribution des approximations d'ordre 1 est déjà petite par rapport à l'approximation d'ordre zéro : on a, en effet, dans le cas d'un champ électrique constant et intense, avec $H = 0$:

$$\left.\begin{aligned} f_2^{(0)} &= \text{const. } \exp\left[-\int \frac{6 m_2 v_2^3 \, dv_2}{\Gamma_2^2 m_1 \lambda^2}\right], \\ f_2^{(1)} &= \frac{6 m_2 v_2}{m_1 \Gamma_2^2 \lambda} f_2^{(0)} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

et l'on voit que $f_2^{(1)}$ a en facteur le terme $\frac{m_2}{m_1} \frac{1}{\Gamma_2^2}$ qui est d'autant plus petit que $\frac{m_2}{m_1}$ est faible (cas du gaz lorentzien) et que Γ_2^2 est grand, de sorte que les contributions provenant de $f_2^{(1)}$ sont en général petites devant celles provenant de $f_2^{(0)}$; il est alors raisonnable de penser que les approximations supérieures seraient à leur tour très petites devant $f_2^{(1)}$. Nous vérifions ainsi que notre développement n'est pas effectué suivant les puissances des champs

extérieurs et c'est pourquoi le développement de Bayet, Delcroix et Denisse en $\frac{\omega_H}{\nu}$ n'est valable que pour $\frac{\omega_H}{\nu}$ petit. Le développement de ces auteurs présente l'intérêt de permettre une évaluation rapide et aisée du terme en $[\mathbf{H}_0 \wedge \mathbf{H}_0 \wedge \mathbf{E}]$.

C'est ainsi qu'ils aboutisent en partant de nos résultats à une formule pour le courant de conduction (avec $\omega = 0$) :

$$\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E} + \sigma \frac{\omega_H}{\nu}\left(1 - \frac{\omega_H^2}{\nu^2}\right) \times E \sin\varphi\, \mathbf{n} - \sigma \frac{\omega_H^2}{\nu^2}\left(1 - \frac{\omega_H^2}{\nu^2}\right) E \sin\varphi\, \mathbf{n}', \quad (14)$$

Nous avons pu, depuis, obtenir la théorie générale valable par des champs magnétiques d'orientation et d'intensité quelconques [3] et qui donne les résultats corrects tout en permettant de préciser le sens des approximations que l'on fait. On obtient pour $\mathbf{I}$ la formule générale :

$$\mathbf{I} = \frac{4\pi n_2 e_2^2}{3 m_2}[J_1 \mathbf{E} + J_2(\mathbf{H}_0 \wedge \mathbf{E}) + J_3 \mathbf{H}_0 \wedge (\mathbf{H}_0 \wedge \mathbf{E})], \quad (15)$$

où J_1, J_2 et J_3 s'expriment en fonction des six intégrales G que nous avons définies dans [3]. En particulier, pour $\omega = 0$, si l'on suppose que Γ_2^2 est petit (donc que $f_2^{(0)}$ est maxwellien) et que $\frac{v_2}{\lambda} = \nu$ est constant, on obtient une formule correspondant à (14) :

$$\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E} + \sigma \frac{\omega_H}{\nu} \frac{1}{1 + \frac{\omega_H^2}{\nu^2}} E \sin\varphi\, \mathbf{n} - \sigma \frac{\omega_H^2}{\nu^2} \frac{1}{1 + \frac{\omega_H^2}{\nu^2}} E \sin\varphi\, \mathbf{n}', \quad (14')$$

où

$$\sigma = \frac{n_2 e_2^2}{m_2 \nu}.$$

On voit que (14′) n'est équivalent à (14) que pour $\frac{\omega_H}{\nu} \ll 1$.

Pour terminer, nous examinerons les hypothèses faites par M. Bayet dans un travail [6] où il développe une méthode analogue à celle de Huxley : il admet que la fréquence moyenne des collisions est constante et, supposant que les « libres vies individuelles » se répartissent suivant la loi

$$\mathrm{d}n_{(\theta)} = n f \exp(-f\theta)\, \mathrm{d}\theta,$$

il en déduit qu'il obtient des résultats indépendants de la fonction de distribution électronique. L'hypothèse faite restreint la partie de la théorie au seul cas où la fréquence de collisions est indépendante de v_2, c'est-à-dire au cas où l'interaction entre les électrons et la composante lourde est en $\frac{1}{r^5}$. Ceci n'exclut pas la nécessité de se servir de la théorie générale pour établir les formules relatives à des intensités des champs extérieurs quelconques. (Nous avons montré, en particulier, que la distribution $f_2^{(0)}$ était alors maxwellienne mais avec une « température électronique » $T' \neq T$, température du gaz [2] et [3]. Mais il nous paraît inexact de dire que les résultats obtenus dans ce cas particulier sont indépendants de la fonction de distribution et ceci pour des raisons identiques à celles que nous avons développées plus haut au sujet de la théorie du l.p.m. (celle-ci suppose en général que λ est indépendant de v_2, ce qui revient à se placer dans le cas où l'on prend comme modèle des particules, celui des sphères rigides).

Nous comparerons les résultats différents de ces méthodes, en partant de la théorie générale des fonctions de distributions que nous appliquerons à trois cas particuliers.

1° $\omega = 0$ (champ électrique constant), $H = 0$. Nous supposerons dans les deux cas que le champ électrique est assez faible pour que la fonction $f_2^{(0)}$ soit maxwellienne. On a, en appliquant, la formule générale (15) :

$$\mathbf{I} = \frac{4\pi n_2 e_2^2}{3 m_2} J_1 \mathbf{E}$$

et l'on a pour J_1, d'après les hypothèses précédentes :

$$J_1 = \frac{m_2}{4\pi k T} \int_0^\infty \frac{v_2^2}{\nu} f_2^{(0)}\, \mathrm{d}\mathbf{v}_2 = \frac{m_2}{4\pi k T} \overline{\left(\frac{v_2^2}{\nu}\right)},$$

d'où

$$\mathbf{I} = \frac{n_2 e_2^2}{3 k T} \overline{\left(\frac{v_2^2}{\nu}\right)} \mathbf{E}. \quad (16)$$

On voit que l'on retombe sur les résultats de Huxley et Bayet dans ce cas particulier, si l'on suppose ν indépendant de v_2. Par contre, la formule de Huxley

$$\mathbf{I} = \frac{n_2 e_2^2}{m_2} \overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)} \mathbf{E}$$

est manifestement inexacte dans le cas général d'après (16), car elle revient à prendre les valeurs moyennes de v_2^2 et $\frac{1}{\nu}$ indépendamment l'une de l'autre.

2° Avec les mêmes hypothèses que précédemment supposons que $\omega \neq 0$. On a alors, avec des calculs analogues :

$$J_1 = \frac{m_2}{4\pi k T}\left[\overline{\left(\frac{\nu v_2^2}{\omega^2 + \nu^2}\right)} \cos\omega t + \omega \overline{\left(\frac{v_2^2}{\omega^2 + \nu^2}\right)} \sin\omega t\right],$$

d'où

$$\mathbf{I} = \frac{n_2 e_2^2}{3 k T}\left[\overline{\left(\frac{\nu v_2^2}{\omega^2 + \nu^2}\right)} \cos\omega t + \omega \overline{\left(\frac{v_2^2}{\omega^2 + \nu^2}\right)} \sin\omega t\right] \mathbf{E}. \quad (17)$$

On voit que (17) correspond au résultat de M. Bayet seulement dans le cas où ν est indépendant de v_2 et que la formule générale n'est nullement indépendante de la fonction de distribution : C'est ce fait qui rend inexactes les formules de Huxley avec des valeurs moyennes, comme nous l'avons montré dans l'exemple précédent.

3° Nous allons terminer cette confrontation des deux théories en étudiant le cas du champ alternatif de pulsation ω superposé à un champ magnétique constant perpendiculaire. D'après la méthode de Bayet [6], basée sur la théorie du l.p.m. on a un courant qui a pour composante sur x :

$$I_x = + \frac{n_2 e_2^2 E}{2 m_2} \left[\frac{\nu \cos \omega t + (\omega - \omega_H) \sin \omega t}{\nu^2 + (\omega - \omega_H)^2} + \frac{\nu \cos \omega t + (\omega + \omega_H) \sin \omega t}{\nu^2 + (\omega + \omega_H)^2} \right]. \quad (18)$$

En appliquant la théorie des fonctions de distribution [2], nous trouvons dans l'hypothèse où ν est indépendant de v_2 :

$$I_x = \frac{n_2 e_2^2 E}{m_2\, g(\nu)} \left(\nu \cos \omega t + \omega \frac{\omega^2 + \nu^2 - \omega_H^2}{\omega^2 + \nu^2 + \omega_H^2} \sin \omega t \right), \quad (19)$$

avec

$$g(\nu) = \frac{\omega^2 (\omega^2 + \nu^2 - \omega_H^2)^2 + \nu^2 (\omega^2 + \nu^2 + \omega_H^2)^2}{(\omega^2 + \nu^2)(\omega^2 + \nu^2 + \omega_H^2)},$$

ce qui fournit pour I_x une expression très différente de celle de Bayet. Notre expression se réduit à celle de Bayet uniquement dans le cas où $\nu \ll \omega$.

Ce résultat montre une fois de plus que le fait dans les raisonnements de ne pas tenir compte de la fonction de distribution conduit à des résultats qui ne sont pas valables pour des plasmas absorbants. (En particulier, la décomposition d'un champ alternatif en deux champs tournants, qui est utilisée dans les calculs de la théorie du l.p.m. tombe en défaut en présence d'une absorption qui peut établir un couplage entre ces deux polarisations *cf.* [3].).

Remarquons enfin que l'objection selon laquelle notre théorie magnéto-ionique n'est valable que pour $|\omega_H| \ll |\omega + if|$ tombe d'elle-même devant notre théorie générale non-maxwellienne. De même, nos formules de la théorie primitive, restent valables pour des champs magnétiques faibles (cas de l'ionosphère) ou pour un champ $\mathbf{H}_0$ quelconque perpendiculaire à E. Les formules les plus générales sont contenues dans [3].

En conclusion, il résulte de la discussion précédente de la théorie basée sur les fonctions de distribution non seulement présente une supériorité incontestable sur la théorie du l.p.m. mais encore permet un traitement rigoureux des phénomènes, en précisant chaque fois la signification réelle des approximations utilisées au cours de raisonnements,

Manuscrit reçu le 22 juin 1954.
Modifié le 15 juillet 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bayet M., Delcroix J. L. et Denisse J. F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **237**, 1503.
[2] Jancel R. et Kahan T. — *J. Physique, Rad.*, 1953, **14**, 533; 1954, **15**, 26.
[3] Jancel R. et Kahan T. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **238**, 995; *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 382; *J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 136; *Nuovo Cimento* 1954, **12**, 573; *The physics of the ionosphere*, p. 365. Congrès de Cambridge, 1954, *Physical Society.*
[4] Cowling T. G. — *Proc. Roy. Soc.*, A, 1944, **183**, 453.
[5] Huxley L. G. — *Proc. Phys. Soc.*, B, 1951, **64**, 844.
[6] Bayet M. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 258.

SUR L'ORIGINE DU FERROMAGNÉTISME DANS LES MÉTAUX DE TRANSITION

Par J. FRIEDEL,

Centre de Recherches métallurgiques de l'École des Mines de Paris.

Sommaire. — Les théories de Weiss et d'Heisenberg, qui supposent les porteurs magnétiques liés chacun à un atome déterminé, ne peuvent expliquer les nombres fractionnaires de porteurs par atome, les fortes chaleurs spécifiques de basses températures ni les observations faites récemment par diffraction de neutrons dans les métaux de transition ferromagnétiques (Fe, Co, Ni). L'approximation des bandes, introduite par Mott dans ce domaine, est plus satisfaisante à ce point de vue. Le ferromagnétisme aurait alors son origine dans les corrections à cette approximation dues aux corrélations à courtes distances entre porteurs. Nous montrons que cette interaction ne joue qu'entre porteurs situés dans un même atome, dont elle tend à aligner les spins, et comment elle peut se déduire des spectres atomiques. Nous justifions ainsi les calculs du point de Curie faits par Slater et par van Vleck. D'après ceux-ci, seuls peuvent être ferromagnétiques les métaux présentant une bande étroite. Le cas des alliages est envisagé. L'absence de ferromagnétisme dans les éléments lourds (Pd, Pt) est reliée à leur fort couplage spin-orbite. Ces considérations ne s'appliquent pas au cas du gadolinium, ni, vraisemblablement à celui des alliages d'Heusler.

1. **Introduction.** — Le ferromagnétisme est l'un des domaines classiques où se sont affrontées les deux approximations fondamentales de la physique du solide et de la chimie, celles des orbitales « atomiques » et « moléculaires ». La première, on le sait, suppose les électrons liés chacun à un atome déterminé, et est à la base des premières études du ferromagnétisme, les théories de Weiss et d'Heisenberg en particulier. La seconde donne lieu aux théories de bandes, où les électrons sont au contraire supposés se déplacer dans tout le métal comme les particules d'un gaz. Il était évident dès le départ que le ferromagnétisme ne pouvait s'expliquer qu'en corrigeant l'une de ces approximations en tenant un peu compte de l'autre; et toute la discussion a porté sur le choix de l'approximation de base. Cet article a pour but d'analyser les raisons expérimentales que l'on a aujourd'hui de prendre l'approximation des bandes comme base de départ, et de préciser comment cette approximation peut être corrigée pour étudier le ferromagnétisme. Un rappel préliminaire des théories de Weiss et d'Heisenberg a plus qu'un intérêt historique, car il permet de bien situer la question et fournit certains concepts qui sont conservés dans l'approximation des bandes.

2. **Théories de Weiss et d'Heisenberg.** — Les théories proposées jusqu'ici pour expliquer le ferromagnétisme dérivent toutes du concept de « champ moléculaire » introduit par Weiss [1] et que nous rappelons tout d'abord.

2.1. Concept de champ moléculaire. — Weiss suppose, on le sait, que les interactions entre porteurs de moments magnétiques peuvent se représenter en moyenne par un champ $\mathbf{H}_W$ qui s'ajoute au champ magnétique appliqué $\mathbf{H}$. Dans une substance ferromagnétique, où les porteurs tendent à aligner leurs moments à basse température, $\mathbf{H}_W$ doit être à peu près parallèle au moment magnétique moyen $\mathbf{M}$ par atome de l'échantillon, et croître avec lui. Weiss suppose pour simplifier un champ proportionnel au moment

$$\mathbf{H}_W = \lambda \mathbf{M}, \tag{1}$$

correspondant à une énergie magnétique $\mathcal{E}$ proportionnelle à $\mathbf{M}^2$

$$\mathcal{E} = \int_0^{\mathbf{M}} \mathbf{H}_W \, d\mathbf{M} = \frac{1}{2} \lambda \mathbf{M}^2. \tag{2}$$

La loi de Langevin-Debye, valable à haute température quelle que soit la nature exacte des porteurs [2], permet alors d'écrire

$$\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H} + \mathbf{H}_W} = \frac{\text{const.}}{T}. \tag{3}$$

D'où, pour la susceptibilité de l'échantillon,

$$\chi = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}} = \frac{\text{const.}}{T - \lambda \text{ const.}}. \tag{4}$$

On s'attend ainsi, au-dessous d'une température critique $T_C = \lambda$ const., dite « température de Curie », à un moment magnétique moyen fini sous champ appliqué nul, c'est-à-dire à un état ferromagnétique; au-dessus de T_C, à un état paramagnétique dont la susceptibilité varie en raison inverse de $T - T_C$, suivant une loi dite de Curie-Weiss. Les métaux de transition ferromagnétique et leurs alliages présentent, au-dessus de leur point de Curie, un paramagnétisme en bon accord avec cette description; et la discussion porte actuellement sur l'origine exacte de ce champ moléculaire et sur la nature des

porteurs. Nous rappelons tout d'abord les idées de Weiss et d'Heisenberg à ce sujet.

2.2. NATURE DES PORTEURS. — Le plus simple est de supposer, avec Weiss, que les atomes du métal conservent à l'état solide une partie au moins du moment magnétique qu'ils possèdent à l'état gazeux. L'atome de nickel par exemple, a, à l'état gazeux, un fort paramagnétisme dû à sa structure $3\,d^8\,4\,s^2$: la couronne $3\,d$ incomplète présente un fort moment magnétique, égal et opposé à celui des deux électrons soustraits à la couronne complète $3\,d^{10}$, et que nous pouvons donc attribuer aux deux « trous positifs » de la couronne. On peut donc supposer que, dans le métal, les porteurs de moment magnétique sont encore des trous positifs $3\,d$ situés dans des *orbitales atomiques* liées chacune à un atome déterminé. Ceci n'exclut pas la présence d'électrons de conductibilité, situés dans des orbitales moléculaires s'étendant à tout le métal; mais on supposera que ces orbitales sont dérivées d'orbitales différentes des atomes libres ($4\,s$, $4\,p$) et que les électrons qui les occupent ne participent pas au ferromagnétisme parce qu'ils ont, en nombre égal, des moments opposés.

Pour des porteurs de ce type, doués d'un moment J bien quantifié, le moment magnétique moyen $\mathbf{M}$ peut se mettre sous la forme d'une certaine fonction de la température T et du champ appliqué

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}_W = \mathbf{H} + \lambda \mathbf{M},$$

dite « fonction de Brillouin » [3]. Cette équation se réduit naturellement à la loi (3) de Langevin-Debye à haute température. Au dessous du point de Curie, elle admet une solution ferromagnétique $M(T) \neq 0$ sous champ appliqué nul. Celle-ci, on le sait, rend compte assez bien des valeurs expérimentales (*fig.* 1), à condition d'admettre que les porteurs ont un moment orbital nul $L = 0$ et un moment de spin $S = J = \frac{1}{2}$. On explique en particulier la tangente horizontale au 0° K et la tangente verticale au point de Curie.

La théorie de Weiss prévoit donc que le moment orbital $L = 2$ des trous positifs $3\,d$ ne contribue pas au moment magnétique, mais est « *bloqué* ». Un blocage de ce type est courant dans les alliages et les sels; il pourrait provenir ici des forts champs électriques non uniformes des électrons de conductibilité, qui perturberaient suffisamment les orbitales des porteurs pour déquantifier leur moment d'orbite [2].

Le blocage du moment d'orbite est effectivement réalisé : on l'a vérifié par des expériences gyromagnétiques qui mesurent le rapport $\frac{g'e}{2mc}$ d'une variation de moment magnétique provoquée par une variation du moment angulaire donnée, et également par des mesures du facteur de Landé

$$g \simeq 4 - g'.$$

On sait que $g' = 1$ pour un moment magnétique purement orbital et $g' = 2$ pour un moment de spin. Pour le fer, le cobalt et le nickel,

$$2 - g' \simeq g - 2 \simeq 0,2,$$

indiquant un blocage presque complet du moment orbital [4]. On a là, avec l'accord des courbes 1 et 2 (*fig.* 1), les deux prédictions les plus remarquables de la théorie de Weiss.

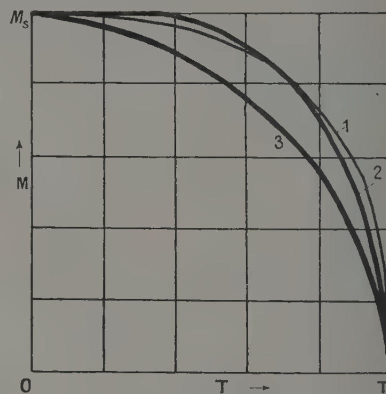


Fig. 1. — Moment magnétique moyen $M(T)$ dans le domaine ferromagnétique.

1. Valeurs expérimentales (Fe, Co, Ni); 2. Théorie de Weiss $\left(S = J = \frac{1}{2}\right)$; 3. Théorie de Stoner (bande parabolique simple).

2.3. NATURE DU CHAMP MOLÉCULAIRE. — Les interactions dipolaires entre des porteurs situés à des distances interatomiques a donnent des champs de l'ordre de μ_B/a^3, si μ_B est le magnéton de Bohr, soit environ 10^3 Oe. Ces champs sont tout à fait insuffisants pour expliquer les températures de Curie T_C observées, de l'ordre de 1000° K. Celles-ci demandent, en effet, des champs moléculaires de l'ordre de kT_C/μ_B, soit 10^7 Oe. L'on est donc conduit, avec Heisenberg [5], à attribuer le champ moléculaire à un phénomène ondulatoire, la répulsion d'*échange* entre les porteurs de spins parallèles, due simplement au caractère antisymétrique de la fonction d'onde. On sait que la fonction d'onde totale du système doit changer de signe quand on permute deux porteurs 1, 2. Si les deux porteurs ont des spins parallèles, la partie spatiale φ de la fonction d'onde doit donc également changer de signe. Ainsi φ doit s'annuler quand les deux porteurs sont confondus, et la probabilité $\varphi^* \varphi$ pour que les deux porteurs soient voisins doit être faible, par continuité. Dans le cadre de la théorie de Weiss, la répulsion d'échange a des effets assez complexes. Si, par exemple, nous rapprochons l'un de l'autre

deux atomes d'hydrogène, leurs deux électrons vont se repousser davantage si leurs spins sont parallèles que s'ils sont antiparallèles; l'énergie potentielle due à leur interaction de Coulomb sera donc, en moyenne, plus faible. Mais cette répulsion, qui distord leurs fonctions d'onde, accroît leur énergie cinétique moyenne; elle éloigne également chacun des électrons du noyau de l'autre atome. Et il est difficile de prédire lequel de ces deux facteurs l'emporte : le premier, qui stabilise l'état à spins parallèles, ou les autres, qui le rendent moins stable que l'état à spins antiparallèles. Ce dernier état est en fait le plus stable pour l'hydrogène et la plupart des autres molécules diatomique. Il n'existe pas de molécule des métaux de transition; et un calcul précis serait dans ce cas encore plus ardu que pour l'oxygène, un des seuls cas connus où l'état stable soit à spins parallèles (*cf.* [6]). Si l'on suppose *a priori*, avec Heisenberg, que les interactions d'échange entre atomes voisins rendent l'état à spins parallèles plus stable que l'autre d'une quantité d'énergie $2I$, on voit facilement en négligeant les interactions à plus grandes distances qu'en moyenne

$$H_W = \frac{nIM}{gS\mu_B M_S}. \tag{5}$$

M_S est le moment magnétique moyen à saturation ($T = 0$) et chaque atome a n voisins. On justifie ainsi l'hypothèse (1) de Weiss que H_W est proportionnel à M. L'équation (5) peut être perfectionnée en tenant compte de ce que, dans cette théorie, l'entourage de chaque porteur, donc son champ moléculaire, dépend en fait un peu de l'orientation de son spin propre [7]. On peut aussi tenir compte des voisins plus éloignés et étendre le traitement aux alliages. Mais des théories de ce type, qui supposent des porteurs dans des orbitales atomiques, se heurtent toutes à des difficultés fondamentales que nous allons rappeler.

2.4. Critique de l'emploi d'orbitales atomiques. — 2.4.1. La première difficulté provient de la valeur du *moment magnétique moyen à saturation* M_S, quand les p porteurs par atome ont des moments parallèles [10]. On a évidemment

$$M_S = pgS\mu_B, \tag{6}$$

avec $S = \frac{1}{2}$ et $g \simeq 2{,}2$ (*cf.* § 1.2). On déduit ainsi de M_S les valeurs *fractionnaires* $p = 0{,}5_5$; $1{,}5_5$ et 2 porteurs par atome, respectivement pour le nickel, le cobalt et le fer [8].

2.4.2. Pour le nickel, par exemple, il n'y a donc qu'un porteur tous les deux atomes environ (*fig.* 2). Les mesures de *diffraction de neutrons* [9] montrent que ces porteurs ne forment *pas* une surstructure : celle-ci donnerait lieu à des lignes de diffraction qu'on n'observe pas. Les porteurs sont donc répartis plus ou moins au hasard. Si, de plus, ils étaient liés chacun à un atome donné, on observerait dans la diffraction un fond continu dû à ce que divers atomes auraient des nombres différents de porteurs. Ce fond continu n'est *pas* non plus observé : les porteurs doivent donc sauter d'un atome à l'autre dans des temps courts par rapport à 10^{-13} seconde qu'un neutron passe au voisinage d'un atome donné dans cette expérience. Il est donc raisonnable de penser que les porteurs forment un *gaz* qui s'étend à tout le métal et s'étudie mieux dans l'approximation des *orbitales moléculaires* et des bandes que dans celle des orbitales atomiques.

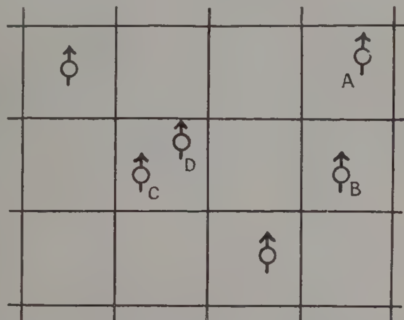


Fig. 2. — Nickel ferromagnétique à saturation. Les ronds surmontés de flèches sont les porteurs avec leurs spins. Les carrés schématisent les polyèdres atomiques.

2.4.3. Enfin, comme Mott l'a remarqué [10], les fortes *chaleurs spécifiques* proportionnelles à la température observées à basses températures ne peuvent s'expliquer que si le gaz des porteurs obéit à la statistique de *Fermi*, non à celle de Bose : les trous positifs constituant les porteurs se déplacent individuellement, non par couples comme on l'a parfois proposé. Les porteurs doivent de plus être dans une *bande* assez *étroite* pour avoir une forte densité d'états au niveau de Fermi. Les calculs ont confirmé que la bande $3d$, plus interne que la bande $4sp$ de conductibilité, remplit ces conditions [11], [12]. L'énergie cinétique ΔE des porteurs doit être cependant assez grande pour qu'ils ne passent sur chaque atome que des temps bien inférieurs à $\Delta t = 10^{-13}$ s. D'où, d'après le principe d'incertitude [1],

$$\Delta E \geq \frac{h}{\Delta t} \simeq 5 \cdot 10^{-2}\ \text{eV}.$$

Les calculs de bandes cités plus haut indiquent

[1] On a, en effet, si m^* est la masse effective des porteurs et v leur vitesse, $\Delta E = \left(\frac{1}{2}\right) m^* v^2$. Pour un gaz de Fermi contenant quelques porteurs par atome, le nombre d'onde moyen $k = \frac{m^* v}{h}$ est de l'ordre de l'inverse de la distance interatomique a. D'où la condition du texte pour $v \geq \frac{a}{\Delta t}$.

effectivement des énergies de Fermi de 0,3 eV ou plus pour les porteurs 3 *d*.

3. Théorie des bandes. — La discussion du paragraphe précédent nous amène à penser que les porteurs doivent être traités comme un gaz de particules qui se propagent dans tout le métal et n'interagissent que peu entre elles. La théorie des bandes, prise dans son sens strict, néglige complètement ces interactions. Elle a permis d'expliquer de façon satisfaisante certaines des propriétés des métaux ferromagnétiques, que nous passons en revue dans cette section. Pour l'étude du champ moléculaire, réservé à la dernière section, il faudra par contre corriger l'approximation des bandes en tenant compte des interactions entre particules.

3.1. Structure des bandes. — Nous supposons, avec Mott [10], que les porteurs du ferromagnétisme sont les trous positifs d'une bande étroite 3 *d*. La figure 3 schématise la configuration

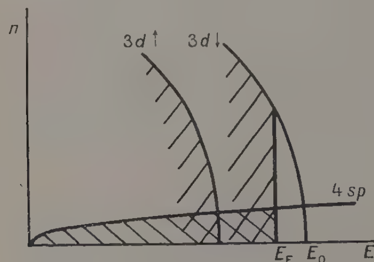


Fig. 3. — Densités $n(E)$ des états par unités de volume et d'énergie dans les diverses bandes du nickel, à saturation.

à saturation, tout au moins pour le cobalt et le nickel : on suppose que tous les trous se trouvent alors dans une des moitiés de la bande, avec une direction de spin. L'équilibre des électrons demande que le niveau de Fermi E_F de cette bande coïncide avec celui de la bande 4 *sp* de conductibilité; l'autre moitié de la bande 3 *d*, pleine, doit se trouver au-dessous de E_F. Un schéma de ce type permet d'expliquer de façon satisfaisante la magnétisation des alliages : moments magnétiques moyens ([10], [13]), et moments individuels des constituants [14].

3.2. Énergie cinétique. — Si l'on néglige complètement les interactions entre porteurs, le modèle des bandes favorise l'état paramagnétique par rapport à l'état ferromagnétique. Par suite du principe d'exclusion, le passage du premier état au second (*fig.* 4 *a* et *b*) demande en effet une dépense notable d'énergie cinétique ΔE_c. Cette énergie peut s'estimer *grossièrement* en supposant que la bande 3 *d* a pour densité d'états (par unités d'énergie et de volume) une simple fonction *parabolique* de l'énergie

$$n(E) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(E_0 - E)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

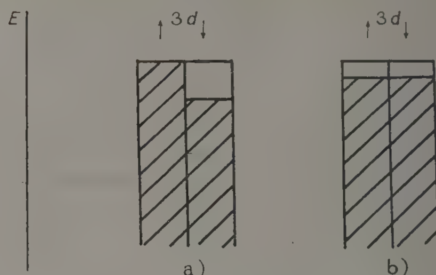


Fig. 4. — Remplissage des demi-bandes 3 *d* du nickel : *a*. État ferromagnétique à saturation; *b*. État paramagnétique de haute température.

On obtient alors facilement, en électrons-volts par porteur,

$$\Delta E_c = \frac{4,85\, p^{\frac{2}{3}}}{\mu r_s^2}. \tag{8}$$

r_s est ici le rayon de la sphère atomique, en angströms,

$$\frac{4\pi r_s^3}{3} = \text{volume atomique.}$$

μ est le rapport de la « masse effective » m^* dans la bande à la masse normale m de l'électron; il se déduit, dans cette approximation, d'une mesure de la chaleur spécifique à basse température, proportionnelle à $n(E_F)$, donc à μ. Le tableau suivant montre que les énergies cinétiques ΔE_c ainsi calculées sont importantes, supérieures en fait aux énergies thermiques kT_c.

Métal.	p.	r_s (Å).	μ.	ΔE_c (eV).	kT_c (eV).
Ni......	$0,5_5$	1,38	29	0,06	0,05
Co......	$1,5_5$	1,38	9,8	0,35	0,12

Ces valeurs sont très approchées : la bande 3 *d* est en fait *complexe* et dévie notablement de la parabole (7). Les calculs de bandes ([12], [15]) montrent que le sommet de la bande 3 *d* est constitué essentiellement par deux bandes étroites, dégénérées suivant les axes k_x, k_y, k_z (1, 2, *fig.* 5 *a*). Ces bandes produisent un fort pic de densité $n(E)$ pour une énergie E_p, peu inférieure à E_0, où elles commencent à toucher la limite de la zone de Brillouin (aux centres L des faces hexagonales, *fig.* 6). Elles sont chacune triplement dégénérées au sommet E_0, qui se place aux centres X des faces carrées; et, au voisinage de E_0, les surfaces d'énergie constante dans l'espace des moments sont en forme d'ellipsoïdes allongés (*fig.* 7 *a*), très différents des sphères pour lesquelles l'approximation (7) est valable. La pré-

sence d'une troisième bande (4) au voisinage de E_0 perturbe encore la forme de $n(E)$, qui est loin d'être parabolique, comme le montre la figure 8. D'après Fletcher [12], le niveau de Fermi ferromagnétique du nickel serait juste au-dessous du pic E_p. Les valeurs données ci-dessus pour ΔE_c sont donc approchées et probablement trop faibles pour le nickel et le cobalt. L'erreur ainsi faite est en partie compensée du fait que les mesures de chaleurs spécifiques sous-estiment un peu les densités électroniques $n(E_F)$, donc les masses effectives ([16], *cf.* § 3.1). Il est évident que, pour le fer, le calcul de ΔE_c demanderait une connaissance plus exacte des densités $n(E)$.

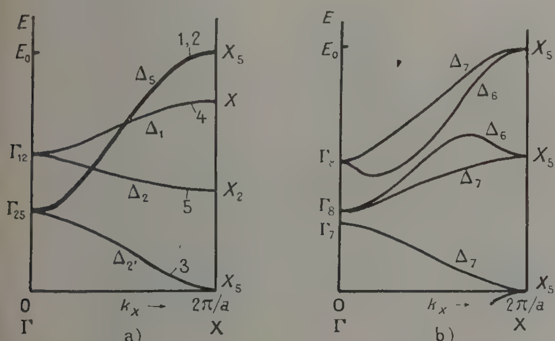


Fig. 5. — Structure des bandes 3 *d* suivant l'axe k_x : *a*. Sans couplage spin-orbite (notations *cf.* [32]); *b*. Avec couplage spin-orbite (notations *cf.* [17]).

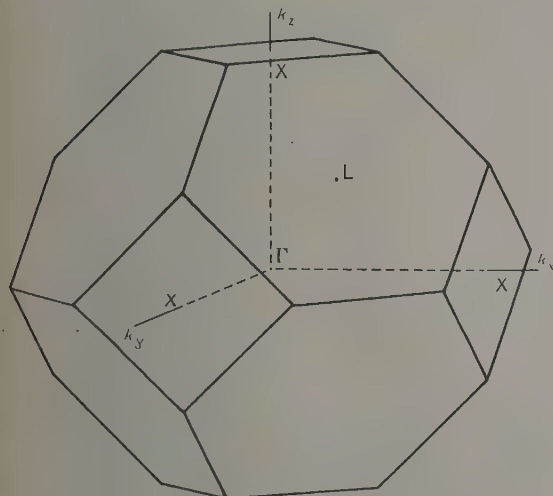


Fig. 6. — Forme de la zône de Brillouin dans le système cubique à faces centrées.

3.3. Magnétisation et facteur de Landé. — Le blocage du moment orbital des porteurs est ici une conséquence directe de la nature de leurs fonctions d'onde [17]. Pour un état d'énergie E et de moment $\mathbf{k}$ donnés, il n'y a, en général, que deux fonctions d'onde possibles, $\Psi(\mathbf{r})$ et $\Psi^*(\mathbf{r})$, correspondant aux deux directions de spin. Si, comme c'est le cas ici, le potentiel du réseau admet un centre de symétrie, $\Psi(-\mathbf{r})$ satisfait la même équation de Schrödinger; d'où

$$\Psi(-\mathbf{r}) = a\,\Psi(\mathbf{r}), \qquad \text{avec} \quad a^\star a = 1.$$

Le moment d'orbite dans la direction z s'écrit alors

$$L_z = \int \Psi^*(\mathbf{r})\, l_z\, \Psi(\mathbf{r})\, \mathrm{d}\tau$$
$$= \int \Psi(-\mathbf{r})\, l_z\, \Psi^*(-\mathbf{r})\, \mathrm{d}\tau = -L_z^\star = 0.$$

Ces égalités résultent de ce que

$$l_z = -i(\mathbf{r} \wedge \nabla)_z$$

et que L_z est réel. On doit donc avoir $g = 2$ dans l'approximation des bandes ordinaires. Le couplage spin-orbite, dont nous n'avons pas tenu compte ici,

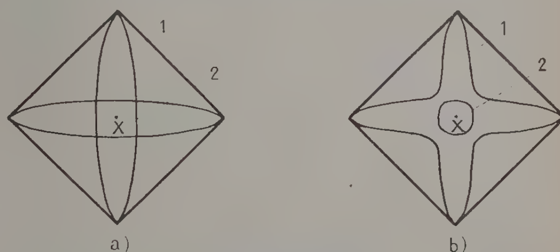


Fig. 7. — Lignes d'énergie constante peu inférieure à E_0 sur les faces carrées de la zône de Brillouin : *a*. sans et *b*. avec couplage spin-orbite.

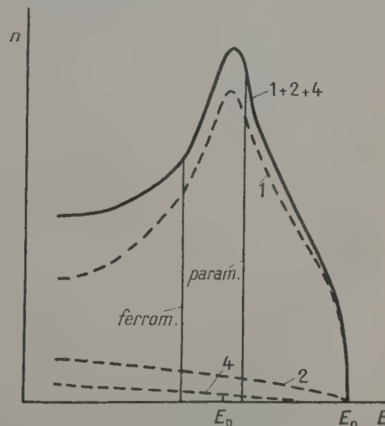


Fig. 8. — Densité *n* des états par unités de volume et d'énergie en fonction de l'énergie *E*, dans la bande 3 *d* du nickel, d'après Fletcher [12].

permet d'expliquer les valeurs de g un peu différentes de 2 observées (*cf.* § 3.3.2).

Stoner [18] a montré, d'autre part, qu'à condition d'admettre la présence d'un *champ moléculaire assez fort*

et proportionnel à M, le modèle de bande de la figure 3 donne une courbe $M(T)$ en presqu'aussi bon accord avec l'expérience que la théorie de Weiss (*fig.* 1) et l'accord peut être amélioré si la bande n'est pas exactement parabolique. Le champ moléculaire à saturation $H_{WS} = H_W(M_S)$ utilisé dans la courbe 3 de la figure 1 a une valeur telle que l'énergie magnétique à saturation par atome $\mathcal{E}_S = \mathcal{E}(M_S)$ donnée par (2) égale les énergies d'origines cinétique et thermique :

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{2} M_S H_{WS} = p(kT_c + \Delta E_c). \tag{9}$$

Le modèle des bandes rend donc compte des valeurs de g et de la forme des courbes $M(T)$ dans le domaine ferromagnétique de façon aussi satisfaisante que la théorie de Weiss. Il reste seulement à expliquer les hypothèses de Stoner sur le champ moléculaire. Ce sera l'objet de la dernière section.

4. Champ moléculaire dans le modèle des bandes.

— Le champ moléculaire peut s'expliquer en tenant compte des interactions entre porteurs, que nous analysons. Nous calculons ensuite les champs moléculaires du nickel, du cobalt et de leurs alliages, et étudions certaines des approximations faites.

4.1. Nature des interactions entre porteurs. — La répulsion d'échange entre porteurs de spins parallèles est encore vraisemblablement à l'origine des champs moléculaires (*cf.* § 1. 3). Cette répulsion s'ajoute à celle d'origine coulombienne, qui s'exerce quelle que soit la direction des spins. Autour d'un porteur donné, la densité ρ_p des porteurs de spins parallèles présente donc une diminution plus forte que celle ρ_a des porteurs de spins antiparallèles (*fig.* 9). Cette répulsion plus forte entre porteurs

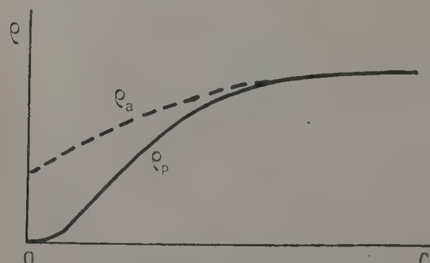


Fig. 9. — Densités ρ_p, ρ_a des porteurs de spins parallèles et antiparallèles en fonction de la distance r à un porteur.

de spins parallèles produit une énergie d'interaction de Coulomb plus faible qui les stabilisent. Nous attribuerons le champ moléculaire au gain d'énergie ainsi obtenu dans l'état ferromagnétique quand on multiplie la proportion de porteurs à spins parallèles.

Dans les métaux usuels (Na, Al, ...) où les électrons de conductibilité peuvent être traités comme des électrons libres de masse normale, le calcul, assez délicat, du champ moléculaire, indique qu'il est trop faible vis-à-vis de la variation d'énergie cinétique ΔE_c pour rendre stable l'état ferromagnétique : dans l'équation (9) T_c serait négatif ([16], [19], [20]). Ces métaux ne sont effectivement pas ferromagnétiques.

Le cas des métaux de transition est plus complexe, du fait que plusieurs bandes, dont certaines étroites, donc à forte masse effective, se chevauchent au niveau de Fermi. *L'apparition du ferromagnétisme y est cependant plus probable pour deux raisons :*

1° L'*énergie cinétique* ΔE_c à dépenser est plus faible, car elle décroît, d'après (8), comme l'inverse de la masse effective m^* quand celle-ci croît;

2° Le *champ moléculaire* est probablement un peu plus fort, car la différence des répulsions d'échange et de Coulomb croît avec m^*.

On sait, en effet, que la répulsion d'échange est pratiquement indépendante de l'énergie cinétique des porteurs, donc de m^*. La taille du trou d'échange ne dépend que de la densité locale des porteurs, et serait de l'ordre de r_e, le rayon de la sphère électronique, si cette densité était uniforme :

$$\frac{3}{4\pi r_e^3} = N = \text{nombre de porteurs par unités de volume.}$$

En fait, dans la bande étroite 3 *d*, les porteurs sont assez fortement concentrés près du centre des atomes, et le trou d'échange a certainement une taille moyenne nettement inférieure à r_e [13]. La taille du trou de Coulomb décroît, au contraire, quand m^* croît. D'après Bohm et Pines [20], le rayon r_c du « trou de Coulomb » serait, en effet, de l'ordre de (2)

$$r_c \simeq \left(\frac{a_0}{3\mu r_e}\right)^{\frac{1}{4}} r_e, \tag{10}$$

où a_0 est le rayon de Bohr et $m^* = \mu m$. r_c varierait donc comme $m^{*-\frac{1}{4}}$.

Quelque grand que soit m^*, r_c ne peut d'ailleurs pas devenir beaucoup plus petit que r_e. Ce résultat intuitif résulte, dans l'approximation de Bohm et Pines, de ce que la densité N' des oscillateurs de plasma ne peut excéder le nombre des degrés de liberté, c'est-à-dire $3N$. Si k_c est le moment maximum des oscillateurs, on a donc

$$r_c \simeq k_c^{-1} = (6\pi^2 N')^{-\frac{1}{3}} \geq (18\pi^2 N)^{-\frac{1}{3}} \simeq \frac{1}{3} r_e. \tag{11}$$

(2) On pourrait penser que r_c est de l'ordre du « rayon de Debye » [31]. Il serait alors proportionnel à la racine carrée de l'énergie cinétique des porteurs, donc varierait comme $m^{*-\frac{1}{2}}$. La conclusion resterait la même.

Dans les métaux de transition, où $r_e > a_0$ et $\mu \gg 1$, cette *limite* ne doit pas être loin d'être atteinte, quoiqu'il reste des porteurs indépendants en nombre suffisant pour donner lieu à une forte chaleur spécifique électronique.

En conclusion, les trous de Coulomb comme ceux d'échanges doivent avoir, dans les métaux de transition, des rayons uniquement fonction de la *densité* des porteurs. Ces rayons sont nettement inférieurs aux rayons électroniques r_e, donc aux *distances interatomiques*. Enfin la densité des porteurs dans une bande étroite 3 *d* doit être assez voisine de ce qu'elle est pour un porteur 3 *d* dans un *atome isolé*, à un facteur de normalisation près. C'est ce que semble confirmer la diffraction des neutrons [9]. En d'autres termes, dans le calcul de la densité des porteurs, le facteur $e^{i\mathbf{k}r}$ des fonctions de Bloch $u_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}r}$ peut être négligé, et la fonction $u_{\mathbf{k}}$ remplacée par une fonction atomique 3 *d*. Ces remarques permettent de justifier un mode de calcul du champ moléculaire employé par Slater [13] et par van Vleck [2].

4.2. Calcul du champ moléculaire. — Si nous considérons la position des porteurs à un instant donné (*fig.* 2), deux porteurs tels que A, B situés dans des polyèdres atomiques différents n'interagissent guère, car ils sont en moyenne à une distance grande vis à vis des rayons des trous de corrélation. Seuls interagissent deux porteurs tels que C et D situés dans un *même* polyèdre atomique. Et nous pouvons supposer que leurs interactions de corrélation sont en moyenne les mêmes que dans un atome *libre*. Dans un tel atome, l'état à spins parallèles est naturellement plus stable que celui à spins antiparallèles (règle de Hund); leur différence d'énergie ΔE (pour un moment d'orbite bloqué) peut se déduire de l'analyse des spectres atomiques ou se calculer directement (³) [21]. Slater et van Vleck estiment $\Delta E \simeq 1$ eV pour le cobalt et le nickel.

Pour les atomes contenant $n = 3, 4, 5, \ldots$ porteurs, qui sont moins fréquents, nous nous contentons d'une évaluation grossière : les trous de corrélation sont assez petits vis à vis des distances interatomiques pour que les porteurs soient supposés n'interagir que deux par deux, avec toujours la même différence d'énergie ΔE. Il y a évidemment $\frac{1}{2} n(n-1)$ interactions de ce type par atome. Pour des porteurs de spins des deux signes en proportions f et f' $(f + f' = 1)$, la proportion des couples de porteurs à spins antiparallèles dans l'atome sera $2ff'$. Si c_n est la concentration de tels atomes à un instant donné, la différence d'énergie magnétique entre l'état considéré et l'état ferromagnétique à saturation $(f = 1,\ f' = 0)$ s'écrit donc

$$\mathcal{E}_S - \mathcal{E} = \int_M^{M_S} H_W\, \mathrm{d}M = \sum_{n \geq 2} c_n\, n(n-1) ff' \Delta E.$$

Comme $M = (f - f') M_S$, on a

$$H_W = \text{const.}\ M \tag{12}$$

avec à saturation

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{2} H_{WS} M_S = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2} n(n-1) c_n \Delta E. \tag{13}$$

L'équation (12) justifie la *première hypothèse* de Stoner; il reste à calculer le champ à saturation, donc les c_n.

Comme les trous de corrélation sont petits par rapport aux distances interatomiques, nous pouvons supposer en première approximation les porteurs répartis *au hasard*. Dans ces conditions (¹),

$$c_n = \frac{p^n}{n!\, \exp p}. \tag{14}$$

Utilisant le fait que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{p^n}{n!} = e^p,$$

les formules (13) et (14) donnent

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{2} p^2 \Delta E. \tag{15}$$

Cette formule avait été obtenue directement par Slater, en remarquant que chaque atome contient en moyenne $\frac{1}{2} p^2$ couples de porteurs, si ceux-ci sont répartis au hasard.

Le tableau suivant compare les valeurs de $\mathcal{E}_S$ ainsi calculées pour le nickel et le cobalt avec celles déduites de l'expérience par l'équation (9). L'accord

		$\mathcal{E}_S$ (eV/atome)	
Métal.	p.	d'après (9).	d'après (15).
Ni	0,55	0,06	0,075
Co	1,55	0,75	0,60

(³) Comme c'est l'usage dans les solides, nous attribuons à chaque fonction d'onde électronique une direction de spin déterminée (comme dans l'approximation du déterminant de Slater). L'état dit à spins parallèles comprend alors l'état singulet et l'un des états triplets ; les états dits à spins parallèles et antiparallèles ont même probabilité de se produire ; ΔE est la *moitié* de la différence d'énergie entre les états singulet et triplet de l'atome libre. Cette convention simplifie les calculs qui suivent sans rien changer au résultat [13].

(¹) S'il y a A atomes et $Ap = N$ porteurs, le lecteur vérifiera sans peine que

$$c_0 = \left(\frac{A-1}{A}\right)^N; \qquad c_1 = N \frac{(A-1)^{N-1}}{A^N};$$

$$c_2 = \frac{N(N-1)}{2} \frac{(A-1)^{N-2}}{A^N}; \quad \ldots; \quad c_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{(A-1)^{N-n}}{A^N}.$$

D'où (14), si l'on remarque que $\left(1 - \frac{1}{A}\right)^{Ap} \to e^{-p}$ quand $A \to \infty$.

est certainement meilleur que la précision des calculs ne le justifie. Un second tableau détaille les contributions (en eV/atome)

$$\mathcal{E}_{Sn} = \frac{1}{4} n(n-1) c_n \Delta E$$

des diverses catégories d'atomes à l'énergie magnétique totale. On voit que les atomes contenant deux porteurs ($n = 2$) fournissent la majeure partie de $\mathcal{E}_S$ dans le nickel; dans le cobalt, ce sont les atomes contenant 2, 3 et 4 porteurs. Ces valeurs assez faibles justifient dans une certaine mesure l'hypothèse de porteurs répartis au hasard faite dans l'approximation (14).

	Ni.		Co.	
n.	c_n.	$\mathcal{E}_{Sn}$.	c_n.	$\mathcal{E}_{Sn}$.
5........	0,087₅	0,0435	0,252	0,127
4........	0,0160	0,024	0,130	0,195
3........	0,0022	0,0065	0,0505	0,151
2........	0,0002₅	0,001	0,0155	0,078

4.3. Approximations faites. — Nous analysons pour finir deux facteurs négligés jusqu'ici : influence des électrons de conductibilité et du couplage spin-orbite.

4.3.1. *Électrons de conductibilité.* — Les considérations suivantes semblent indiquer que leur action n'est pas importante. Les corrélations entre trous positifs $3d$ sont peu affectés par la présence des électrons de conductibilité $4sp$: avec leurs masses effectives beaucoup plus faibles, ces derniers ne peuvent en effet produire d'écrans autour des trous positifs, d'après (10), qu'à des distances supérieures à la taille des trous de corrélations entre trous positifs. Les trous positifs et les électrons de conductibilité ont, d'autre part, une corrélation d'échange qui tend à aligner leurs spins (*cf.* [22]). Mais cette corrélation est certainement faible : dans les atomes libres, elle est plus petite que la corrélation entre les trous $3d$; elle doit être encore plus faible dans le métal, où les électrons de conductibilité sont loin d'être purement $4s$.

4.3.2. *Couplage spin orbite.* — Le potentiel de couplage $\zeta(r)\,\mathbf{l}\mathbf{s}$ a pour premier effet de détruire toutes les dégénérescences de la structure de bandes, sauf au centre Γ de la zone et en certains points de sa surface tels que (5) X, par un mécanisme analogue à ce qui se passe dans la bande de valence du germanium (*fig.* 5 *b*, 7 *b*, *cf.* [23] et références dans [17]).

La destruction de la dégénérescence, près du sommet E_0, est due à ce que $\mathbf{l}$ tend à s'aligner parallèlement ou antiparallèlement à $\mathbf{s}$ suivant qu'on est dans la bande 1 ou 2. Il en résulte un *accroissement des interactions d'échange* dans la bande 1, qui contient la majorité des porteurs. Le principe d'exclusion doit en effet jouer de façon plus rigoureuse, du fait que deux porteurs à spins parallèles tendent aussi à avoir des moments $\mathbf{l}$ parallèles et répugnent donc davantage à pénétrer simultanément dans le même atome. Le rayon du « trou d'échange » entre porteurs à spins parallèles croît donc avec le couplage, devenant de l'ordre des distances interatomiques pour un couplage très fort. Il faut en fait distinguer deux effets, du fait que, si $\mathbf{l}$ se quantifie un peu parallèlement à s_z, inversement $\mathbf{s}$ se déquantifie un peu pour suivre $\mathbf{l}$: le couplage produit un certain mélange des deux directions de spin $|+>$ et $|->$. En se limitant à la bande la plus proche (les bandes 4 et 5 ne se mélangent pas à 1 par raison de symétrie), un calcul de perturbation classique [4] donne pour la fonction d'onde de moment $\mathbf{k}$ et de spin « surtout » + dans la bande 1, assez près du sommet E_0 mais pas trop près d'un point de dégénérescence,

$$\Psi'_{1+} = \Psi_1 |+> + \frac{1}{2} \frac{\langle \Psi_2 | \zeta l_z | \Psi_1 \rangle}{E_1 - E_2} \Psi_2 |+> + \frac{1}{2} \frac{\langle \Psi_2 | \zeta(l_x + i l_y) | \Psi_1 \rangle}{E_1 - E_2} \Psi_2 |->. \quad (16)$$

Ψ_1 et Ψ_2 sont ici les fonctions d'onde d'énergies E_1 et E_2 et de moment $\mathbf{k}$ dans les deux bandes non perturbées. Le premier terme correctif dans (16), dû à la quantification de $\mathbf{l}$, augmente les répulsions entre porteurs à spins *surtout parallèles* (fonctions d'onde de types $\Psi'_{1+}(\mathbf{k})$ et $\Psi'_{1+}(\mathbf{k}')$; le second, dû à la déquantification de $\mathbf{s}$, produit une répulsion d'échange entre porteurs à spins *surtout antiparallèles*. Ces effets ont une importance différente suivant que l'on considère le fer, le cobalt et le nickel ou les métaux plus lourds.

1° Dans les *métaux de transition ferromagnétique*, les perturbations sont faibles. Le mélange des spins (16) est de l'ordre de $\frac{\lambda}{E_1 - E_2}$, où λ, constante de couplage dans l'atome libre, est de 0,06 eV dans le nickel, soit plus de dix fois plus petite que la moyenne de $E_1 - E_2$ dans la partie vide de la bande 1. Les corrections d'échange sont du second ordre en $\frac{\lambda}{E_1 - E_2}$, comme on le vérifie aisément (6), et l'*on peut donc négliger le couplage spin-orbite dans le calcul du point de Curie.*

(5) Du fait, pour X_5, que les combinaisons linéaires

$$f(r)[(x - iz)y|+> - zx|->]$$

et

$$f(r)[(z - iy)x|+> - yz|->]$$

des fonctions d'onde $xy\,f(r)$, $yz\,f(r)$ et $zx\,f(r)$ des points X_3, X_5 sont des fonctions propres de l'opérateur de couplage $\mathbf{l}.\mathbf{s} = -i(\mathbf{r} \wedge \nabla)\mathbf{s}$. On notera aussi que, pour un couplage spin-orbite infiniment petit, la perturbation finie qui correspond au regroupement des points X_1 et X_2 (*fig.* 5 *a*) en X_5 (*fig.* 5 *b*), n'affecte les bandes 4 et 5 que dans une région infiniment petite de l'espace des moments.

(6) On le voit pour deux porteurs à spins surtout antiparallèles $\Psi'_{+1}(\mathbf{k})$ et $\Psi'_{-1}(\mathbf{k}')$ en substituant (16) dans l'inté-

Le couplage a permis, d'autre part, d'expliqueles valeurs de g un peu supérieures à 2 et, avec un succès moindre, le facteur K_1 d'anisotropie magnétique ([8], [12], [24]). Pour g, (16) donne, au second ordre près en $\frac{\lambda}{E_1 - E_2}$,

$$\Delta g = g - 2 = \frac{L_z}{S_z} = \frac{\langle \Psi'_{1+} | l_z | \Psi'_{1+} \rangle}{\langle \Psi'_{1+} | s_z | \Psi'_{1+} \rangle} = \frac{\langle \Psi_1 | l_z | \Psi_2 \rangle \langle \Psi_2 | \zeta l_z | \Psi_1 \rangle}{\frac{1}{2}(E_1 - E_2)} \simeq \frac{\lambda}{E_1 - E_2}.$$

$E_1 - E_2$ est ici la distance moyenne entre les deux bandes dans la région de l'espace des moments où seule la bande 1 est vide (dans la petite région où les deux bandes sont vides, leurs contributions à g se compensent [12]). Comme l'énergie de la bande 1 varie peu près de E_0, $E_1 - E_2$ est en moyenne un peu supérieure à l'énergie de Fermi des porteurs, soit 0,25 eV dans le nickel ferromagnétique (§ 2.1). D'où un Δg positif et de l'ordre de 0,2, en accord avec l'observation (§ 2.3) (7).

2° Dans les *métaux de transition plus lourds*, tels que le palladium et le platine, le couplage est nettement plus fort, étant, on le sait proportionnel au champ électrique que subit le porteur. De fait, le doublet de spin des ions *gazeux* nd^9 a une largeur de 1 eV dans le platine, contre 0,25 eV dans le nickel; et, dans les ions nd^8, on passe du couplage Russel-Saunders pour le nickel au couplage jj pour le palladium et le platine.

Dans l'état *métallique*, ce fort couplage doit aligner **l** sur **s** pour les porteurs de la bande 1, et leur donner un moment

$$J \simeq L + S = \frac{5}{2}$$

assez bien quantifié. Cette conclusion est en accord avec l'aspect des spectres d'absorption X, comme Mott l'a remarqué [10]. Les métaux de transition présentent en effet à leurs limites d'absorption $L_{II, III}$ un pic d'absorption fort et étroit (« raie blanche »), dû sans doute à des transitions de l'électron $2p$ éjecté vers les états non occupés de la bande nd, qui est étroite et a une forte densité d'états [25]. On note cependant que la raie blanche de L_{II} est plus faible que celle de L_{III} dans le palladium [26] et totalement absente dans le platine ([27], [28]). Dans ces métaux, les états libres de la bande nd, en majorité dans la bande 1, ont un moment $J \simeq \frac{5}{2}$.

Les règles de sélection permettent alors une absorption L_{III}, qui crée un trou $2p$ avec

$$J = L + S = \frac{3}{2},$$

mais pas ou peu d'absorption L_{II}, où, pour le trou $2p$ créé,

$$J = L - S = \frac{1}{2}.$$

Un fort couplage correspond certainement à un mélange prononcé des deux directions de spin et à de fortes interactions d'échange entre porteurs de spins tant plutôt parallèles que plutôt antiparallèles. Le développement (16) n'est plus valable, λ étant de l'ordre de $E_1 - E_2$, et ces effets demanderaient une étude spéciale (8). On peut cependant prévoir qu'un fort couplage est *défavorable au ferromagnétisme*, et ceci explique sans doute que seuls sont ferromagnétiques des métaux et alliages des éléments de transition de la première famille (9). Les interactions entre porteurs à spins plutôt antiparallèles sont en effet fortement stabilisées par la répulsion d'échange due au mélange des spins. Celles entre porteurs à spins plutôt parallèles ne peuvent par contre guère être stabilisées par l'accroissement de répulsion d'échange dû au couplage : un tel accroissement perturbe en effet les fonctions d'onde des porteurs, donc augmente de façon sensible leur énergie cinétique; elle ne diminue guère leur énergie potentielle de Coulomb, qui décroît à distances croissantes et est déjà faible sans couplage.

4.4. Point de Curie des alliages. — Son calcul précis demanderait une connaissance assez exacte de la structure électronique des alliages. Nous nous contentons de fixer une *limite supérieure* à sa variation avec la concentration.

Soit Z la différence de valence entre une impureté de substitution et le métal solvant : $Z = 1$ pour le cuivre dans le nickel. On sait que le nombre moyen de porteurs par atome dans l'alliage est

$$p' = p - Zc \qquad (17)$$

grale d'échange

$$\iint \Psi'^{*}_{1+}(\mathbf{k}, 1)\, \Psi'^{*}_{1-}(\mathbf{k}', 2)\, r_{12}^{-1}\, \Psi'_{1+}(\mathbf{k}, 2)\, \Psi'_{1-}(\mathbf{k}', 1)\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

C'est aussi vrai pour deux porteurs à spins surtout parallèles si les coefficients $\langle \Psi_2 | \zeta l_z | \Psi_1 \rangle$ sont des imaginaires purs. Cette condition est remplie dans l'approximation, ici raisonnable, des « liaisons fortes » : on néglige les couplages entre le spin d'un atome et les orbites de ses voisins et écrit

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}_i) = \sum_{\mathbf{d}} \Psi_a(\mathbf{r}_i - \mathbf{d}) \exp(i\mathbf{kd}),$$

où Ψ_a est une fonction atomique réelle, et la sommation a lieu sur les nœuds **d** du réseau.

(7) L'annulation de Δg dans le nickel liquide [33] vient sans doute d'un blocage de **l** par les champs électriques non uniformes dus au désordre dans le liquide. L'annulation de Δg dans les alliages solides Ni Fe aux environs de 50 pour 100 [34] pourrait provenir d'une cause analogue, mais elle est controversée [35].

(8) Ces corrélations complexes expliquent peut-être le désaccord observé dans le palladium et le platine entre les densités d'états $n(E_F)$ déduites dans l'approximation des bandes de la chaleur spécifique à haute température et de la susceptibilité paramagnétique [25].

(9) Mis à part le cas du gadolinium.

pour une concentration c d'atomes dissous ([10], [13], [14]).

Si l'on pouvait négliger la différence des potentiels dans les atomes dissous et solvants, l'alliage aurait exactement la même structure de bandes $n(E)$ que le solvant pur, et ses porteurs seraient répartis uniformément sur tous les atomes. L'alliage se comporterait donc comme un métal pur contenant p' porteurs par atome.

Les équations (8), (9) et (15) permettraient d'écrire pour son point de Curie T'_C

$$\frac{T'_C}{T_C} = \frac{\mathcal{E}_S}{p' \mathrm{k}\, T_C} \left(\frac{p'}{p}\right)^2 - \frac{\Delta E_C}{\mathrm{k}\, T_C} \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{2}{3}}. \qquad (18)$$

On voit facilement que la variation ainsi obtenue pour T'_C est trop forte, du fait que la structure de bande du solvant n'est pas parabolique, mais présente un pic, même pour le nickel (*fig.* 8). Il faudrait aussi tenir compte de ce que la densité des porteurs n'est pas uniforme. Pour les alliages de nickel (Co, Cu, Zn, Al, Si, Ti, Sb), les points expérimentaux s'alignent assez bien sur la droite $\frac{T'_C}{T_C} = 1 - \frac{Z_C}{p}$ ([29], [30]). La figure 10 montre qu'ils varient effectivement moins vite avec la concentration que ne le prévoit l'équation (18).

L'auteur tient à remercier le professeur N. F. Mott pour de nombreux entretiens sur le sujet traité dans cet article, les professeurs J. H. van Vleck, C. Kittel,

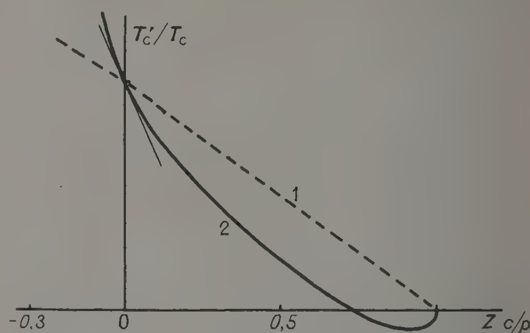


Fig. 10. — Point de Curie T'_C des alliages de nickel, en fonction de la concentration c et de la différence de valence Z ($p = 0{,}5_5$ porteurs par atome).
1, valeurs expérimentales; 2, limite (18).

P. Aigrain et G. C. Fletcher et le docteur C. Herring pour leurs critiques et la correction de certaines erreurs.

Manuscrit reçu le 25 mai 1955.
Modifié le 15 octobre 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Weiss P. — *J. Physique Rad.*, 1907, **6**, 667.
[2] Van Vleck J. H. — Electr. and Magn. Suscept., Oxford, 1933; *Rev. Mod. Physics*, 1953, **25**, 220.
[3] Brillouin L. — *J. Physique Rad.*, 1927, **8**, 74.
[4] Kittel C. — Solid State Physics, New-York, 1953.
[5] Heisenberg W. — *Z. Physik*, 1928, **49**, 619.
[6] Moffitt W. — *Proc. Roy. Soc.*, 1951, **210** A, 224;
Fumi F. G. et Perr R. G. — *J. Chem. Phys.* 1953, **21**, 1864;
Meckler A. — *J. Chem. Phys.*, 1953, **21**, 1750.
[7] Yvon J. — *Cahiers de Physique*, 1945, **28**, 1.
[8] Argyres P. et Kittel C. — *Acta Met.*, 1953, **1**, 241.
[9] Shull G. C. — Conférence Solvay, Bruxelles, 1954.
[10] Mott N. F. — *Proc. Phys. Soc.*, 1935, **47**, 571; 1949, **62**, 416; *Progr. Met. Phys.*, 1952, **3**, 76.
[11] Krutter H. M. — *Phys. Rev.*, 1935, **48**, 664.
[12] Fletcher G. C. — *Proc. Phys. Soc.*, 1952, **65** A, 192; *Acta Met.*, 1953, **1**, 467; *Proc. Phys. Soc.*, 1954, **67** A, 505.
[13] Slater J. C. — *Phys. Rev.*, 1936, **49**, 537; 1951, **81**, 385; *J. Appl. Phys.*, 1937, **8**, 585.
[14] Friedel J. — *Ann. Physique*, 1954, **9**, 158; *Advances in Phys.*, 1954, **3**, 446.
[15] Howarth J. D. — *Proc. Roy. Soc.*, 1953, **220** A, 513.
[16] Pines D. — *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 626; Conférence Solvay, Bruxelles, 1954.
[17] Elliott R. J. — *Phys. Rev.*, 1954, **96**, 266, 280.
[18] Stoner E. C. — *Proc. Roy. Soc.*, 1938, **165** A, 372; *Rep. Progr. Phys.*, 1948, **11**, 43.
[19] Wigner E. — *Phys. Rev.*, 1934, **46**, 1002.
[20] Bohm D. et Pines D. — *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 609.
[21] Goudsmit S. — *Phys. Rev.*, 1928, **31**, 946.
[22] Zener C. — *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 440; 1951, **83**, 299; 1952, **85**, 324.
[23] Shockley W. — *Phys. Rev.*, 1950, **71**, 191.
[24] Brooks H. — *Phys. Rev.*, 1940, **58**, 909.
[25] Mott N. F. et Jones H. — *Metals and Alloys*, Oxford, 1936.
[26] Sandström A. E. — *Phil. Mag.*, 1936, **22**, 497.
[27] Cauchois Y. et Manescu I. — *C. R. Acad. Sc.*, 1940, **211**, 172.
[28] Bearden J. A. et Snyder T. M. — *Phys. Rev.*, 1941, **59**, 162.
[29] Bozorth R. M. — Ferromagnetism, New-York, 1951.
[30] Hozelitz H. — Ferromagnetic Prop. of Met. and Alloys, Oxford, 1952.
[31] Debye P. et Huckel H. — *Phys. Z.*, 1923, **24**, 185.
[32] Bouckaert L. P., Smoluchowski R. et Wigner E. — *Phys. Rev.*, 1936, **50**, 58.
[33] Bagguley D. M. S. et Harrick N. J. — *Proc. Phys. Soc.*, 1954, **67** A, 648.
[34] Bagguley D. M. S. — *Proc. Phys. Soc.*, 1954, **66** A, 765.
[35] Hoskins R. et Wiener G. — *Phys. Rev.*, 1954, **96**, 1153.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU SCHÉMA DE DÉSINTÉGRATION DE $^{192}_{77}$Ir

Par F. GRARD, L. DANGUY,

Centre de Mons de l'Institut interuniversitaire des Sciences nucléaires

et J. FRANEAU,

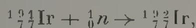
Chargé de Cours à la Faculté Polytechnique de Mons.

Sommaire. — Les spectres de conversion interne et de conversion dans le plomb de $^{192}_{77}$Ir (radiateur de plomb de 7 μ d'épaisseur) ont été relevés entre 180 et 550 keV au moyen d'un spectrographe à double focalisation du type Siegbahn et Svartholm.

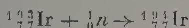
L'examen a porté principalement sur les raies γ de faible intensité en vue de déterminer leur origine et leur énergie. Les résultats obtenus confirment et précisent les schémas de désintégration proposés récemment.

De plus la présence très probable d'une raie d'énergie égale à 511 keV a été signalée, accusant l'émission possible de positrons ou la formation de paires au cours de la désintégration de ^{192}Ir.

1. **Introduction.** — L'iridium naturel se compose d'un mélange de deux isotopes stables : $^{191}_{77}$Ir (proportion : 38,5 pour 100) et $^{193}_{77}$Ir (61,5 pour 100). En le soumettant à l'action des neutrons lents, il y a formation, selon le processus suivant :

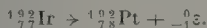


$$^{191}_{77}\mathrm{Ir} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{192}_{77}\mathrm{Ir},$$



$$^{193}_{77}\mathrm{Ir} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{194}_{77}\mathrm{Ir}$$

de deux isotopes radioactifs $^{192}_{77}$Ir et $^{194}_{77}$Ir dont les périodes sont respectivement de 74,5 jours et de 19,0 h [1]. La source d'iridium utilisée au laboratoire nous a été fournie par Harwell et a été mise en service plus de deux mois après réception. L'étude a donc porté uniquement sur $^{192}_{77}$Ir de plus grande période. Le spectre d'électrons émis par $^{192}_{77}$Ir se compose d'un fond continu auquel se superpose un grand nombre de raies de conversion interne [2], [3], [4]. Il a d'abord été supposé que $^{192}_{77}$Ir se transforme, par émission β^-, en un isotope du platine, $^{192}_{78}$Pt, lequel, se trouvant dans un état excité, émet à son tour, toute une série de rayons γ :



$$^{192}_{77}\mathrm{Ir} \rightarrow ^{192}_{78}\mathrm{Pt} + ^{\;0}_{-1}\varepsilon.$$

Les raies enregistrées au spectrographe β ont ainsi été considérées comme résultant du phénomène de conversion interne dans les atomes de platine formés [2], [3].

Mais en augmentant la précision des mesures, Cork et ses collaborateurs [4] ont montré que les différences d'énergies entre certaines raies K et L étaient caractéristiques, non pas du platine, mais de l'osmium et ont ainsi été conduits à l'idée que $^{192}_{77}$Ir pouvait aussi présenter le phénomène de capture K, selon



$$^{192}_{77}\mathrm{Ir} + ^{\;0}_{-1}\varepsilon \rightarrow ^{192}_{76}\mathrm{Os}.$$

L'osmium excité résultant émet un spectre de rayons γ, mis en évidence au spectrographe β par les raies de conversion interne correspondantes.

D'autre part, à la suite de ces phénomènes : conversion interne et capture K, les atomes de platine et d'osmium, privés de certains électrons K, L ou M, émettent un rayonnement X caractéristique de ces deux éléments. Par l'emploi d'un spectrographe à cristal courbe du type Du Mond, Müller et ses collaborateurs [5] ont confirmé le fait et dans son rapport précédemment cité [4], Cork a pu mettre en évidence, dans le domaine des basses énergies, la présence d'un groupe de rayons Auger caractéristiques du platine et de l'osmium, apportant ainsi une preuve supplémentaire de l'existence des deux phénomènes d'émission β^- et de capture K au cours de la désintégration de $^{192}_{77}$Ir.

Au total, Cork a pu mettre en évidence 17 raies γ dont les énergies s'échelonnent entre 135 et 615 keV. Certaines d'entre elles, de forte intensité, ont été confirmées par Müller. A cette série, il convient d'ajouter, dans un domaine d'énergie supérieure, cinq raies γ, dont l'existence a été reconnue récemment au moyen d'un spectromètre à scintillations par Pringle, Turchinetz et Taylor [6].

Le tableau I récapitule les résultats obtenus par les différents auteurs cités (colonnes 2, 3 et 4).

Dans la colonne (5), sont indiqués les éléments (Pt ou Os) dont sont issus les rayons γ détectés. Leur origine, et par conséquent leur énergie ont été déduites des données du spectre de conversion interne, c'est-à-dire des énergies des raies K et des différences d'énergie existant entre les raies K et L correspondant à un même γ. Cependant, il s'en trouve certains, tels que γ_2, γ_3, γ_6, etc. pour lesquels il y a indétermination : ceux-ci étant de faible intensité ne donnent lieu, en effet, qu'à une seule raie (K) de conversion interne. Cork et ses colla-

borateurs [4] ont levé le doute dans ces cas en prévoyant leur origine et leur énergie d'un schéma de désintégration hypothétique construit sur la base des rayons γ bien connus.

Dans le présent rapport, nous donnerons les résultats obtenus au spectrographe β décrit ci-après, par conversion dans le plomb des rayons γ issus de la désintégration de $^{192}_{77}$Ir. Cette méthode a été adoptée en vue de lever l'indétermination relative à certains d'entre eux, comme il en a été question ci-dessus.

2. **Spectrographe.** — Notre spectrographe à double focalisation (type Siegbahn et Svartholm) a été entièrement réalisé au Centre de Mons (*fig.* 1).

Il est basé sur la théorie des trajectoires d'une particule chargée dans un champ magnétique fixe. On trouvera les développements théoriques complets, à ce sujet, dans les travaux signalés en fin d'article [7].

Le champ magnétique est créé par un électro-aimant de forme annulaire, avec bobine centrale, comprenant 9 000 spires environ, alimentée par courant stabilisé électroniquement.

L'étalonnage de l'appareil se fait à l'aide de raies d'énergie bien connues, dont nous déterminons la position en fonction de l'intensité du courant d'excitation. La valeur de cette intensité se mesure par l'intermédiaire de la tension existant aux bornes d'une résistance étalon, tension qui se détermine elle-même par une méthode potentiométrique précise.

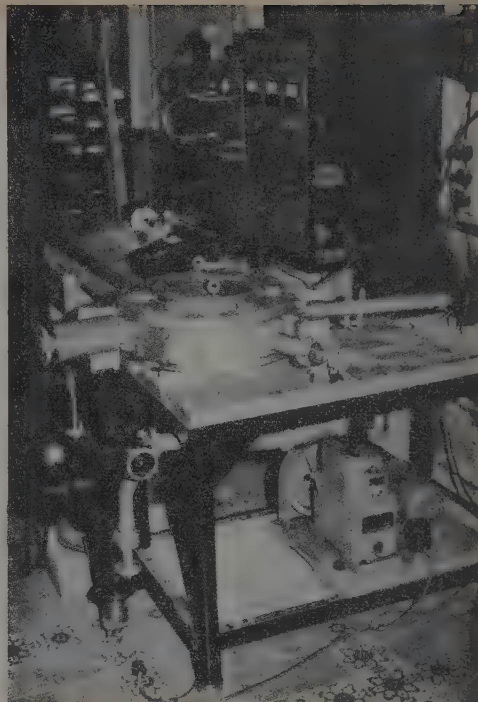


Fig. 1.

Cependant, afin d'éviter les perturbations dues au magnétisme rémanent et aux phénomènes d'hys-

Tableau I.

(1). Dénom. arb. (Cork).	(2). Énergie (Cork).	(3). Énergie (Müller).	(4). Énergie (Pringle, Turchinetz et Taylor).	(5). Origine.	(6). Nous.	(7). Valeur des énergies adoptées pour établir le schéma de désintégration.	(8). Origine.
1	135,9	136,331	–	Pt	–	136	Pt
2	151 ou 156	–	–	?	–	156	Pt
3	168 ou 173	–	–	?	–	173	Pt
4	201,1	201,306	–	Os	–	201	Os
5	205,7	205,736	–	Os	–	205	Os
6	283	–	–	(?) Os	282	282	Os
6′	–	–	–	–	287,0	287	Pt
7	294,9	295,942	–	Pt	294,0	296	Pt
8	307,7	308,454	–	Pt	308,0	308	Pt
9	316,1	316,462	–	Pt	316,0	316	Pt
10	396 ou 400	–	–	?	–	396	Os
11	415,1	–	–	Pt	419,0	419	Pt
11′	–	–	–	–	430,0	–	?
12	434 ou 438	–	–	?	438,0	438	Pt
13	467,4	467,984	–	Pt	467,5	468	Pt
14	484	484,75	–	Os	484,0	484	Os
15	588,6	588,40	–	Pt	590,0	589	Pt
16	603,7	604,53	–	Pt	604,0	604	Pt
17	611,2	612,87	–	Pt	613,0	613	Pt
18	–	–	788	(?) Pt	–	788	Pt
19	–	–	883	(?) Pt	–	883	Pt
20	–	–	920	(?) Pt	–	920	Pt
21	–	–	1 080	(?) Os	–	1 080	Os
22	–	–	1 210	(?) Pt	–	1 210	Pt

térésis, il est nécessaire de démagnétiser l'appareil avant et de ne jamais faire décroître le courant pendant le relevé d'un spectre.

Le pouvoir de résolution de l'appareil est de 0,4 pour 100 pour une énergie de 0,6 MeV (valeur obtenue à la fois par le calcul et la photographie).

Le but du présent travail étant de déterminer exactement l'énergie de certains rayons γ émis par ^{192}Ir et ainsi de fixer leur origine, compte tenu de l'énergie des électrons de conversion interne, l'étalonnage du spectrographe a été fait en relevant le spectre de conversion interne de ^{192}Ir (*fig.* 2) et

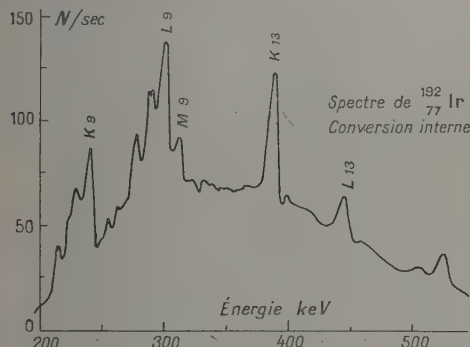


Fig. 2.

en assignant à chacune des raies choisies une énergie égale à celle trouvée par Cork pour les raies correspondantes.

La source d'iridium utilisée à cet effet était constituée par un dépôt pulvérulent appliqué sur une bande de papier gommé de 2 mm de largeur Les raies les plus intenses, à savoir K_9, L_9, K_{13} et L_{13} (¹), ont été choisies pour fixer la courbe d'étalonnage du spectrographe.

Il est intéressant de remarquer que les points représentatifs de ces raies se placent tous, dans le diagramme énergie-intensité du courant de magnétisation, sur une droite, laquelle d'ailleurs, extrapolée vers les hautes énergies, passe par les points figurant les raies K et L de conversion interne du ^{137}Cs ($\sim$0,6 MeV) et des deux groupes de raies K et L de conversion dans le plomb des rayons γ du ^{60}Co ($\sim$ 1,2 MeV) (*fig.* 3).

Si l'on place sur ce graphique le point correspondant à l'énergie minimum des électrons que laisse passer le compteur, c'est-à-dire 180 keV, dans ce cas où la paroi de verre du tube a une épaisseur de 30 mg/cm² (²), on constate que ce point est également sur la droite d'étalonnage.

Cette façon de procéder s'est révélée très commode et a permis de contourner le problème délicat de la mesure du champ magnétique dans le spectrographe, mesure qui nécessiterait cependant encore, en général, un étalonnage au moyen de raies dont les énergies sont bien connues.

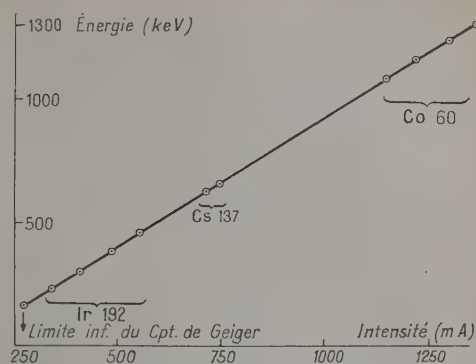


Fig. 3.

Signalons pour terminer ce chapitre, que la reproductibilité des spectres se fait à moins de 0,2 pour 100 près.

3. **Résultats expérimentaux.** — Nous avons relevé le spectre de conversion dans le plomb de $^{192}_{77}$Ir (*fig.* 4). La source était constituée par un petit cylindre d'iridium de 2 mm de diamètre et de 2 mm de hauteur, fixé derrière un écran en aluminium de 1 mm d'épaisseur et de 2,5 mm de largeur sur

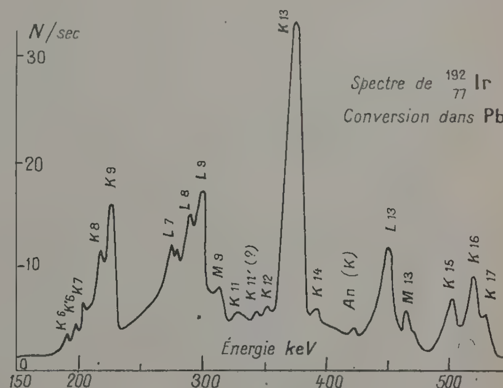


Fig. 4.

la face antérieure duquel a été déposé, par évaporation thermique sous vide, une mince couche de plomb très pur de 7 μ d'épaisseur. Le pouvoir de résolution mesuré avec une telle source a été trouvé égal à 1,3 pour 100 au niveau de 0,6 MeV.

Au moment du relevé du spectre, l'activité de la source s'élevait à 25 mC.

Les énergies des raies obtenues sont consignées dans le tableau II.

(¹) *Voir* tableau II.
(²) Tube B 12, 20th Century electronics.

a. Les raies de conversion dues aux γ_7, γ_8, γ_9, γ_{13}, γ_{15}, γ_{16} et γ_{17} conduisent à des valeurs d'énergie égales à celles que leur ont attribué les auteurs précédemment cités et confirment ainsi la courbe d'étalonnage du spectrographe.

b. Nous avons porté notre attention sur les raies de plus faible intensité relative. Les deux raies *K* de $\gamma_{6'}$ et γ_6, situées à 194,2 et 199,5 keV correspondent à des énergies γ de 281,8 et 287,1 keV [3]. Notons que si l'on retranche de chacune de ces énergies, l'énergie de liaison des électrons *K* respectivement de l'osmium et du platine [4], on trouve deux valeurs approximativement égales (208 et 209 keV). Il s'en suit donc, que dans le spectre de conversion interne, devra se situer, aux environs de 209 keV, une raie résultant des deux processus différents suivants : conversion du γ d'énergie 282 keV dans un atome d'osmium, produit à la suite du phénomène de capture *K* et conversion du γ d'énergie 287 keV dans un atome de platine résultant de l'émission d'une particule β^-. Cork a effectivement trouvé cette raie à 209,2 keV. Ce fait est un excellent accord avec la prévision de Pringle, Turchinetz et Taylor. En effet, ces auteurs ont trouvé, par application de la règle de combinaison de Ritz au schéma de désintégration de $^{192}_{77}$Ir établi au moyen des énergies γ les mieux connues, qu'un γ d'énergie égale à environ 283 keV devait être émis par le platine et par l'osmium.

Tableau II.

Cork.	Énergie de la raie (keV).	Origine de la raie.	Énergie du γ correspondant. (keV).	Origine du γ correspondant.	Remarque.
6...	194,2	*K*	282	Os	–
6'...	199,5	*K*	287	Pt	–
7...	206	*K*	294	Pt	–
8...	220	*K*	308	Pt	–
7...	277,0	*L*	294	Pt	–
8...	292,0	*L*	308	Pt	–
9...	228,5	*K*	316	Pt	Etalonnage
9...	300,0	*L*	316	Pt	Étalonnage
9...	314,0	*M*	316	Pt	–
11...	331	*K*	419	Pt	–
11'...	342	*K*	430	?	–
12...	350	*K*	438	Pt	–
13...	379	*K*	467,5	Pt	Étalonnage
14...	396	*K*	484	Os	*Voir*
	422	*K*	509,6	Raie an.	discussion
	–	*L*	438,0	–	dans le texte
13...	452,0	*L*	467,5	Pt	Étalonnage
13...	464,0	*M*	467,5	Pt	Étalonnage
15...	502	*K*	590	Pt	–
16...	515	*K*	604	Pt	–
17...	525	*K*	613	Pt	–

Les deux énergies γ de 282 et 287 keV, de faible intensité, n'ont pas été déterminées par Müller et ses collaborateurs.

c. Il n'a malheureusement pas été possible de justifier la prévision de Cork et de Pringle, selon laquelle la raie γ_{10} serait issue d'un atome d'osmium. En effet, la raie *K* de conversion dans le plomb se situe au voisinage immédiat de la raie *M* de γ_9, laquelle est de forte intensité.

d. La position de la raie de conversion *K* de γ_{11} a conduit à une valeur d'énergie quelque peu différente de celle trouvée par Cork (*voir* tableau I), mais mieux en rapport avec le schéma de désintégration proposé en fin d'article.

Schéma de désintégration de $^{192}_{77}$Ir.

e. Nous avons pu lever le doute quant à l'origine de la raie γ_{12}. Un pic photoélectrique situé à 350 keV précise l'énergie de ce γ à 438 keV. Compte tenu de l'énergie des électrons de conversion interne correspondant (360 keV, trouvé par Cork et confirmé par nous) il est ainsi établi qu'il est issu d'un atome de platine.

f. Pour ce qui concerne γ_{11}, Cork, bien que n'ayant relevé que la raie *K* de conversion interne, a assigné la provenance de cette raie à l'osmium et ce, en accord avec un schéma de désintégration proposé. Cette hypothèse s'est révélée exacte. Il s'est trouvé en effet, dans le spectre de conversion dans le plomb, un pic, situé à 396 keV et correspondant à une énergie γ de 483,6 keV.

g. Enfin, pour terminer, nous signalons la présence d'une raie de faible intensité apparue dans le spectre de conversion dans le plomb et située

(3) Énergie de liaison *K* du plomb : 87,6 keV.
(4) 73,8 et 78,1 keV respectivement.

à 422,6 keV (*fig.* 4). En ajoutant à cette énergie, l'énergie d'arrachement des électrons L du plomb, nous obtenons une valeur d'énergie γ de 438 keV (γ_{12}), semblant indiquer que la raie citée serait une raie L de conversion dans le plomb.

Cependant, nous devons rejeter cette hypothèse, car cette raie et la raie de conversion K de γ_{12} sont toutes deux de même intensité. Nous sommes plutôt enclins à croire que nous sommes en présence de la raie K de conversion dans le plomb du rayonnement γ d'annihilation, d'énergie égale à 510,9 keV.

En conclusion, nous proposons, au moyen des valeurs des énergies des différents γ émis par $^{192}_{77}$Ir, un schéma de désintégration de cet isotope (*voir* colonnes 7 et 8 du tableau I).

Manuscrit reçu le 29 mars 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] SINCLAIR W. K. et HOLLOWAY A. F. — *Nature*, 1951, **167**, 365.
GOODMAN L. J. et POOL M. L. — *Phys. Rev.*, 1947, **71**, 288.
[2] LEVY. — *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 352.
[3] CORK. — *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 581.
[4] CORK, LE BLANC, STODDARD, CHILDS, BRANYAN et MARTIN. — *Phys. Rev.*, 1951, **82**, 258.
[5] MÜLLER, HOYT, KLEIN et DU MOND. — *Phys. Rev.*, 1952, **88**, 775.
[6] PRINGLE, TURCHINETZ et TAYLOR. — *Phys. Rev.*, 1954, **95**, 115.
[7] SWARTHOLM et SIEGBAHN. — *Archiv. G. Nat. Ast. Fysik*, 1946, **33-A**, n° 21.
SHULL F. B. et DENNISON D. R. — *Phys. Rev.*, 1947, **71**, 681; 1947, **72**, 731.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 16, NOVEMBRE 1955, PAGE 843.

POTENTIEL NEUTRON-PROTON ET PHOTODÉSINTÉGRATION DU DEUTÉRON

Par K. CHADAN,
Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure, Paris.

Sommaire. — Des travaux récents sur la détermination exacte du potentiel neutron-proton dans l'hypothèse des forces centrales, [1] à [6], ont montré que, dans le cas où le système se trouve dans l'état triplet de spin (deutéron), le potentiel est déterminé uniquement par la loi de variation, en fonction de l'énergie, du déphasage triplet S, par l'énergie de liaison du deutéron et par un certain paramètre lié à la fonction d'onde de celui-ci. On montre que ce paramètre peut se déduire de la pente au voisinage du seuil de la courbe de variation en fonction de l'énergie de la section efficace totale de photodésintégration du deutéron. Dans le cas général, on montre qu'il y a toujours au moins une valeur du paramètre compatible avec cette pente. On applique ensuite la méthode générale à une variation particulière du déphasage (approximation indépendante de forme) et l'on en déduit le potentiel correspondant.

1. Introduction. — Nous ne considérons dans cet article que le cas des forces centrales entre les deux nucléons (neutron et proton) qui constituent le deutéron.

On s'est longtemps demandé si le potentiel entre deux nucléons pouvait être déterminé sans ambiguïté à partir de la loi de variation de l'un des déphasages correspondant à un moment angulaire donné (1) en fonction de l'énergie d'une part, du spectre d'énergie des états liés correspondant au même moment angulaire d'autre part. La question a été résolue par les travaux de Jost et Kohn [1], [2], Levinson [3], [4], Gel'fand et Levitan [5], [6] qui ont donné des méthodes pour le calcul effectif du potentiel.

(1) Le potentiel étant central, le moment angulaire total est une constante du mouvement.

Voici, en résumé, les résultats essentiels obtenus par ces auteurs :

On suppose d'abord que le potentiel $V(r)$ satisfait aux conditions suivantes :

$$\int_0^\infty r\,|V(r)|\,dr < \infty, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty r^2\,|V(r)|\,dr < \infty. \tag{2}$$

Dans ces conditions on montre [3] que le nombre des états liés, si ceux-ci existent, est fini. Il y a alors deux cas à distinguer, suivant qu'il existe ou non de tels états.

a. Le potentiel ne donne lieu à aucun état lié pour le moment angulaire considéré. Il est alors déterminé uniquement [3] à partir de la loi de

variation du déphasage. Par exemple, s'il n'y a aucun état lié S, le potentiel est déterminé sans ambiguïté à partir de la variation du déphasage S en fonction de l'énergie.

Le potentiel N—P dans l'état singulet de spin entre dans cette catégorie. Nous supposons que la loi de variation du déphasage singulet S, $\eta_{os}(k)$ a été déterminé expérimentalement et que par conséquent le potentiel singulet $V_s(r)$ est connu. Dans la suite l'indice s représentera l'état singulet.

b. Il y a un ou plusieurs états liés. Soit n le nombre de ces états. On montre alors [1], [2] que la seule connaissance de la variation du déphasage et du spectre d'énergie des états liés correspondants ne suffit pas à déterminer sans ambiguïté le potentiel. En effet, on peut trouver dans ce cas une famille à n paramètres de potentiels dits équivalents conduisant tous à la même loi de variation du déphasage et au même spectre d'énergie. Il y a un paramètre pour chaque état lié; il dépend de la fonction d'onde dans cet état. Si, comme on écrit habituellement, $r^{-1}\psi_\alpha(r)$ est la partie radiale de la fonction d'onde correspondant au niveau α, on peut prendre comme ensemble de paramètres les valeurs de $\psi'_\alpha(0)$ ou des grandeurs liées à celles-ci. Pour déterminer le potentiel de façon unique il nous faut donc connaître la valeur de chacun de ces paramètres.

Considérons le cas particulier simple où il n'y a qu'un seul état lié S et supposons connues l'énergie de liaison ($-B$) de cet état ainsi que la loi de variation du déphasage S en fonction de l'énergie. La famille des potentiels équivalents est une famille à un paramètre. Nous pouvons calculer explicitement un potentiel particulier $V_0(r)$ de la famille [1] et la fonction $\psi_0(r)$ correspondante qui obéit à l'équation [2]

$$\psi_0'' - \gamma^2\psi_0 = V_0\psi_0, \qquad \gamma = \left(\frac{MB}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

et qui est normalisée de façon que

$$\lim_{r\to\infty} e^{\gamma r}\psi_0 = 1. \tag{4}$$

Si maintenant nous désignons par λ le paramètre qui caractérise la famille, tous les potentiels et leurs fonctions ψ sont donnés par les formules suivantes [2] :

$$V(\lambda, r) = V_0(r) + \frac{\lambda\psi_0\psi_0'}{N(\lambda, r)} + \frac{\lambda^2\psi_0^4}{8[N(\lambda, r)]^2}, \tag{5}$$

$$\psi(\lambda, r) = \frac{\psi_0}{N(\lambda, r)}, \tag{6}$$

$$N(\lambda, r) = 1 + \frac{\lambda}{4}\int_r^\infty [\psi_0(t)]^2\,dt, \tag{7}$$

λ variant entre $-4\left[\int_0^\infty \psi_0^2\,dr\right]^{-1}$ et l'infini.

Le potentiel dans les états triplet de spin rentre dans cette catégorie. Il y a un seul état lié qui correspond au deutéron. Désignons par $V_t(r)$ le potentiel effectif dans ce cas. Il correspond à une valeur particulière λ_0 du paramètre λ.

Le but de cet article est de montrer comment on peut calculer cette valeur λ_0 à partir de la pente au seuil de la courbe qui représente la variation de la section efficace totale de la photodésintégration du deutéron en fonction de l'énergie. Nous choisissons la pente au seuil de désintégration pour éliminer les termes dus aux transitions d'ordre multipolaires élevés. Pour l'énergie zéro (il s'agit, bien entendu, de l'énergie des particules émergentes), seule la transition magnétique dipolaire contribue à la photodésintégration.

2. **Photodésintégration du deutéron** [7]. —

Considérons la réaction (désintégration) :

$$D + \hbar\omega = N + P, \tag{8}$$

et la réaction inverse (capture) :

$$N + P = D + \hbar\omega. \tag{9}$$

Désignons par $\sigma_{\text{dés}}(l, m)$ et $\sigma_{\text{cap}}(l, m)$ les sections efficaces des deux réactions pour un rayonnement multipolaire d'ordre (l, m). Chacun de ces termes est la somme de deux termes, l'un électrique et l'autre magnétique. Les sections efficaces totales respectives sont données par

$$\sigma_{\text{dés}} = \sum_l \sum_m \left[\sigma^{\text{E}}_{\text{dés}}(l, m) + \sigma^{\text{M}}_{\text{dés}}(l, m)\right], \tag{10}$$

$$\sigma_{\text{cap}} = \sum_l \sum_m \left[\sigma^{\text{E}}_{\text{cap}}(l, m) + \sigma^{\text{M}}_{\text{cap}}(l, m)\right]. \tag{11}$$

Pour poursuivre nos calculs, nous nous plaçons dans le système du centre de masse des deux nucléons. Soit v la vitesse relative des deux nucléons; nous poserons

$$k = \frac{Mv}{2\hbar}, \qquad K = \frac{\omega}{C}. \tag{12}$$

L'équation qui exprime la conservation de l'énergie dans la réaction s'écrit alors

$$k^2 + \gamma^2 = \frac{MCK}{\hbar}. \tag{13}$$

Nous désignerons par Ψ la fonction d'onde normalisée du deutéron (y compris le spin) et par $r^{-1}\psi$ la partie radiale de cette fonction d'onde. Le deutéron se trouvant dans l'état $^3S_1$, on a

$$\Psi = (4\pi)^{-\frac{1}{2}} r^{-1}\psi\chi_{1m'}. \tag{14}$$

où χ est la fonction d'onde de spin. ψ obéit à l'équation

$$\psi'' - \gamma^2\psi = V_t\psi, \tag{15}$$

[2] Dans cet article, nous appelons potentiel le produit $\frac{MU}{\hbar^2}$ où U est le potentiel habituel et M la masse du nucléon.

et a été normalisé de façon que

$$\int_0^\infty \psi^2 \, dr = 1. \qquad (16)$$

De même Φ désignera la fonction d'onde complète du système N + P et $r^{-1}\varphi$ représentera la partie radiale de cette fonction. Nous indiquerons plus tard comment φ doit être normalisé. Pour l'instant nous savons que si le système N + P est dans l'état de moment angulaire L, φ doit obéir à l'équation

$$\varphi'' + \left[k^2 - \frac{L(L+1)}{r^2}\right]\varphi = V(r)\varphi, \qquad (17)$$

$V(r)$ étant égal à $V_s(r)$ ou à $V_t(r)$ suivant que le système est dans l'état singulet ou dans l'un des états triplets.

Avec les notations précédentes les sections efficaces électriques et magnétiques de capture s'expriment par les formules suivantes [7] :

$$\sigma^{E}_{\text{cap}}(l, m) = \frac{8\pi(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} \frac{K^{2l+1}}{\hbar v} |Q_{lm} + Q'_{lm}|^2, \qquad (18)$$

$$\sigma^{M}_{\text{cap}}(l, m) = \frac{8\pi(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} \frac{K^{2l+1}}{\hbar v} |M_{lm} + M'_{lm}|^2, \qquad (19)$$

où Q_{lm}, Q'_{lm}, M_{lm}, M'_{lm} désignent les expressions

$$Q_{lm} = e\int r_P^l Y^*_{lm}(\theta_P, \varphi_P)\Psi^*\Phi \, dr, \qquad (20)$$

$$Q'_{lm} = \frac{-iK}{l+1}\frac{e\hbar}{2MC} \times \left[\mu_P\int r_P^l Y^*_{lm}(\theta_P, \varphi_P)\,\mathrm{div}\left(\Psi^*\vec{r}_P \wedge \vec{\sigma}_P\Phi\right)d\tau + \mu_N\int r_N^l Y^*_{lm}(\theta_N, \varphi_N)\,\mathrm{div}\left(\Psi^*\vec{r}_N \wedge \vec{\sigma}_N\Phi\right)d\tau\right], \qquad (21)$$

$$M_{lm} = \frac{-1}{l+1}\frac{e\hbar}{MC}\int r_P^l Y^*_{lm}(\theta_P, \varphi_P)\,\mathrm{div}\left(\Psi^*\vec{L}_P\Phi\right)d\tau, \qquad (22)$$

$$M'_{lm} = -\frac{e\hbar}{2MC} \times \left[\mu_P\int r_P^l Y^*_{lm}(\theta_P, \varphi_P)\,\mathrm{div}\left(\Psi^*\vec{\sigma}_P\Phi\right)d\tau + \mu_N\int r_N^l Y^*_{lm}(\theta_N, \varphi_N)\,\mathrm{div}\left(\Psi^*\vec{\sigma}_N\Phi\right)d\tau\right]. \qquad (23)$$

Les sommations portent également sur le spin. L'indice P désigne le proton et l'indice N le neutron. $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ est l'harmonique sphérique d'ordre (l, m). La quantité $\vec{\sigma}$ est le vecteur de spin dont les composantes sont les matrices de Pauli. $\vec{L}$ est l'opérateur $-i\vec{r} \wedge \vec{\nabla}$ et μ désigne le moment magnétique en magnétons de Bohr.

Quant aux sections efficaces de désintégration, elles sont données par

$$\sigma^{E}_{\text{dés}}(l, m) = \left(\frac{k}{K}\right)^2 \sigma^{E}_{\text{cap}}(l, m),$$

$$\sigma^{M}_{\text{dés}}(l, m) = \left(\frac{k}{K}\right)^2 \sigma^{M}_{\text{cap}}(l, m),$$

d'où l'on tire

$$\sigma^{E}_{\text{dés}}(l, m) = \frac{8\pi(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} \frac{MK^{2l-1}}{2\hbar^2} k |Q_{lm} + Q'_{lm}|^2, \qquad (24)$$

$$\sigma^{M}_{\text{dés}}(l, m) = \frac{8\pi(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} \frac{MK^{2l-1}}{2\hbar^2} k |M_{lm} + M'_{lm}|^2. \qquad (25)$$

3. Étude de la section efficace totale au voisinage du seuil. — A partir des expressions précédentes nous allons calculer la pente au seuil de la courbe qui donne la variation de la section efficace totale de photodésintégration en fonction de l'énergie. On voit bien qu'il suffit pour cela de chercher les termes qui, parmi les Q_{lm}, Q'_{lm}, M_{lm}, M'_{lm} tendent vers une limite non nulle lorsque k tend vers zéro. D'après (13), pour $k = 0$, $K = \frac{\gamma^2 \hbar}{MC}$ est différent de zéro. Tout revient donc à chercher les états du système libre N + P pour lesquels la fonction d'onde Φ a une limite non identiquement nulle lorsque k s'annule. Seule la partie radiale de cette fonction dépend de k et cette partie radiale est de la forme $\frac{\varphi}{kr}$ où φ obéit à (17) et a été normalisée de telle façon que

$$\varphi \underset{r \to \infty}{\simeq} A_L \sin\left(kr - \frac{1}{2}L\pi + \eta_L\right), \qquad (26)$$

A_L étant une constante et η_L le déphasage d'ordre L. Il est bien connu que le seul cas où $\frac{\varphi}{k}$ a une limite non identiquement nulle correspond à $L = 0$. Après la photodésintégration, le système doit donc se trouver dans un état S. Nous allons chercher maintenant les transitions qui, de l'état ${}^3S_1$ du deutéron, conduisent à un état S du système libre.

D'après les règles de sélection [7] seules les transitions suivantes ont cette propriété :

a. Les transitions dipolaires magnétiques ($l = 1$) :

$${}^3S_1 \to {}^3S_1,$$
$${}^3S_1 \to {}^1S_0;$$

b. La transition quadrupolaire électrique ($l = 2$) :

$${}^3S_1 \to {}^3S_1.$$

Or, étant donné que nous nous plaçons aux énergies très faibles pour lesquelles K est petit, le terme quadrupolaire qui est proportionnel à K^3 est tout à fait négligeable devant le terme dipolaire qui est proportionnel à K. Nous ne tiendrons compte que des transitions dipolaires magnétiques.

Considérons d'abord la transition magnétique dipolaire ${}^3S_1 \to {}^3S_1$. Dans cette transition, les deux termes M_{lm}, M'_{lm} s'annulent pour les raisons suivantes :

— M_{lm} est nul puisque $L_P = \frac{1}{2}(L_P + L_N) = \frac{1}{2}L_{tot}$ et que l'état final est un état S;

— M'_{lm} est nul parce que $\vec{\sigma}$ n'agit pas sur la partie spatiale des fonctions d'onde et il y a orthogonalité des deux parties spatiales étant donné qu'elles se rapportent au même état $^3S_1$.

Il ne nous reste donc que la seule transition $^3S_1 \to {}^3S_1$. Ici encore le terme M_{lm} est nul pour la même raison que plus haut. Par contre M'_{lm} n'est pas nul. Nous obtenons finalement

$$\frac{d\sigma_{\text{dés}}}{dk}(k=0) = \frac{8\pi}{9}\frac{\gamma^2}{\hbar C}\sum_m \left|\lim_{k\to 0} M'_{1m}\right|^2 P(m), \quad (27)$$

où $P(m)$ représente le poids statistique de l'état m. Or, m' étant la composante suivant Oz du spin du deutéron, nous avons

$$m + m' = 0.$$

On en conclut que :

$$P(m) = \frac{1}{3}.$$

On vérifie de même, au moyen d'intégrations par parties, que

$$M'_{1,+1} = M'_{1,-1} = M'_{1,0},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d\sigma_{\text{dés}}}{dk}(k=0) = \frac{8\pi}{9}\frac{\gamma^2}{\hbar C}\left|\lim_{k\to 0} M'_{1\,0}\right|^2, \quad (28)$$

avec

$$M'_{1\,0} = \frac{e\hbar}{2MC}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int \Psi^*\left(\mu_P\vec{\sigma}_P + \mu_N\vec{\sigma}_N\right)_z \Phi\, d\tau, \quad (29)$$

que l'on déduit de l'expression générale (23) par une intégration par parties. Remarquons que dans (29), l'expression $(\mu_P\vec{\sigma}_P + \mu_N\vec{\sigma}_N)_z$ peut s'écrire

$$\left(\mu_P\vec{\sigma}_P + \mu_N\vec{\sigma}_N\right)_z = \frac{1}{2}(\mu_N + \mu_P)\left(\vec{\sigma}_N + \vec{\sigma}_P\right)_z + \frac{1}{2}(\mu_N - \mu_P)\left(\vec{\sigma}_N - \vec{\sigma}_P\right)_z.$$

Dans le second membre le terme $(\vec{\sigma}_N + \vec{\sigma}_P)_z$ est nul puisque l'état final est un état singulet. Nous obtenons donc finalement

$$M'_{1\,0} = \frac{e\hbar}{2MC}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int \Psi^*\frac{1}{2}(\mu_N - \mu_P)\left(\vec{\sigma}_N - \vec{\sigma}_P\right)_z \Phi\, d\tau. \quad (30)$$

Revenons maintenant aux fonctions d'onde Φ et Ψ. Φ peut s'écrire

$$\Phi = \frac{\varphi}{kr}\chi_{00}, \quad (31)$$

où χ représente la fonction d'onde de spin. φ, solution de l'équation suivante :

$$\varphi'' + k^2\varphi = V_s\varphi, \quad (32)$$

doit être normalisée de façon que

$$\varphi_{r\to\infty} \simeq \sin(kr + \eta_{0s}). \quad (33)$$

Comme nous avons indiqué plus haut, le rapport $\frac{\varphi}{k}$ a une limite non identiquement nulle lorsque k tend vers zéro. Nous désignons cette limite par $F(r)$. Cette fonction est connue puisque nous supposons que $V_s(r)$ a été déterminé explicitement.

La fonction d'onde Ψ est donnée par (14) dans lequel le terme ψ est inconnu. Nous y remplaçons ce terme par l'expression générale (6) normalisée, c'est-à-dire par

$$\psi = \sqrt{\frac{1+\lambda\delta}{4\delta}}\,\frac{\psi_0}{N(\lambda, r)}, \quad (34)$$

avec

$$4\delta = \int_0^\infty \psi_0^2\, dr.$$

En remplaçant, dans (28), Φ et Ψ par leurs expressions et en tenant compte du fait que les photons incidents ne sont pas polarisés, ce qui introduit un facteur $\frac{1}{2}$, nous déduisons

$$\frac{d\sigma_{\text{dés}}}{dk}(0) = \frac{\pi}{3}\frac{e^2}{\hbar C}\left(\frac{\hbar}{MC}\right)^2\gamma^2(\mu_N - \mu_P)^2\, G(\lambda), \quad (35)$$

avec

$$G(\lambda) = \frac{1+\lambda\delta}{4\delta}\left[\int_0^\infty F\frac{\psi_0}{N(\lambda, r)}\, dr\right]^2. \quad (36)$$

Remplaçant la valeur expérimentale de $\frac{d\sigma_{\text{dés}}}{dk}(k=0)$ dans (35), nous obtenons une équation en λ. La ou les racines de cette équation nous donnent les valeurs possibles de λ_0 par lesquelles il faut remplacer λ dans (5) pour avoir le potentiel $V_t(r)$. Il y a donc un ou plusieurs potentiels possibles suivant que l'équation en λ a une ou plusieurs racines.

4. **Analyse de l'équation** (35). — Sans préciser la forme de $F(r)$ et de ψ_0, *nous allons montrer que l'équation* (35) *a au moins une solution en* λ *quelle que soit la valeur expérimentale de* $\frac{d\sigma_{\text{dés}}}{dk}$ (0).

Pour cela remarquons d'abord que lorsque λ tend vers $-\delta^{-1}$, le second membre de notre équation tend vers zéro. Ceci résulte du fait que l'intégrale qui figure dans l'expression de $G(\lambda)$ a une limite finie lorsque λ tend vers $-\delta^{-1}$.

Voyons maintenant la forme de $G(\lambda)$ lorsque λ devient très grand. Il est visible que, dans ces conditions, seules les grandes valeurs de r contribuent à l'intégrale. Nous pouvons donc remplacer $F(r)$ et ψ_0 par leurs formes asymptotiques. La forme asymptotique de ψ_0 est donnée par (4). Quant à celle de $F(r)$, elle s'obtient de la façon suivante :

La forme asymptotique de φ est donnée par (33); d'autre part on sait que [1]

$$\lim_{k\to 0} \eta_{0s}(k) = 0.$$

De là on tire la forme asymptotique de $F(r)$

$$F(r) \underset{r\to\infty}{\simeq} \varepsilon + r, \qquad \varepsilon = \lim_{k\to 0} \frac{\eta_{0s}(k)}{k}. \tag{37}$$

En portant ces formes asymptotiques dans l'expression de $G(\lambda)$ et en intégrant, on trouve que

$$G(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\simeq} \frac{\pi^2}{8\gamma^3}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{\lambda}{8\gamma} e^{2\varepsilon\gamma}\right)\right]. \tag{38}$$

Cette formule nous montre que, lorsque λ tend vers l'infini, le second membre de (35) tend vers l'infini.

De l'analyse précédente il résulte la proposition énoncée plus haut d'après laquelle notre équation en λ a au moins une solution quelle que soit la valeur de $\frac{d\sigma_{dés}}{dk}(0)$.

5. Exemple d'application des résultats précédents. — Nous allons utiliser les résultats précédents en faisant ce qu'on appelle l'approximation « indépendante de forme » [7]. Le déphasage S est alors donné par la formule

$$k \operatorname{cotg} \eta_0 = -\alpha + \frac{1}{2} r_0 k^2. \tag{39}$$

Nous adoptons ici les valeurs expérimentales indiquées par Jost et Kohn [1].

Dans le cas singulet on a

$$\alpha_s = -0{,}0422 \cdot 10^{13}\ \text{cm}^{-1}, \qquad r_{0s} = 2{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}.$$

Posons

$$a = \frac{2}{r_{0s}}\left[\ 1 + (1 - 2\alpha_s r_{0s})^{\frac{1}{2}}\right] = 1{,}5 \cdot 10^{13}\ \text{cm}^{-1},$$

$$b = \frac{2}{r_{0s}}\left[-1 + (1 - 2\alpha_s r_{0s})^{\frac{1}{2}}\right] = 0{,}0899 \cdot 10^{13}\ \text{cm}^{-1},$$

$$\mu = \frac{b-a}{2a} = -0{,}469.$$

Le potentiel $V_s(r)$ est alors donné par [1]

$$V_s(r) = \frac{2\mu(1+\mu)a^2 e^{-ar}}{[1+\mu(1-e^{-ar})]^2}. \tag{40}$$

Quant à la fonction φ correspondante, elle est égale à [8]

$$\varphi = \frac{1}{2i\,|f(k)|^2}[f(k)f(-k, r) - f(-k)f(k, r)], \tag{41}$$

avec

$$f(k, r) = e^{-ikr}\left[1 + \frac{a}{a+2ik}\,\frac{2\mu\, e^{-ar}}{1+\mu(1-e^{-ar})}\right],$$

$$f(k) = f(k, 0) = \frac{b+2ik}{a+2ik}.$$

Ceci nous fournit pour $F(r)$ la valeur suivante :

$$F(r) = \lim_{k\to 0} \frac{\varphi}{k} = \frac{2}{b} - \frac{2}{a} + \frac{2}{b} g(r) + r(1+g), \tag{42}$$

avec

$$g(r) = \frac{2\mu\, e^{-ar}}{1+\mu(1-e^{-ar})}.$$

La forme asymptotique de $F(r)$, conformément à ce que nous avons montré plus haut, est donnée par

$$F(r) \underset{r\to\infty}{\simeq} \frac{2}{b} - \frac{2}{a} + r = \varepsilon + r. \tag{43}$$

De même, dans le cas triplet, on a

$$\alpha_t = 0{,}186 \cdot 10^{13}\ \text{cm}^{-1}, \qquad r_{0t} = 1{,}56 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}.$$

Si l'on pose, comme plus haut,

$$a' = \frac{2}{r_{0t}}\left[\ 1 + (1 - 2\alpha_t r_{0t})^{\frac{1}{2}}\right] = 2{,}114 \cdot 10^{13}\ \text{cm}^{-1},$$

$$b' = \frac{2}{r_{0t}}\left[-1 + (1 - 2\alpha_t r_{0t})^{\frac{1}{2}}\right] = -0{,}448 \cdot 10^{13}\ \text{cm}^{-1},$$

$$\mu' = \frac{b'-a'}{2a'} = -0{,}606,$$

$$\gamma = -\frac{b'}{2} = 0{,}224 \cdot 10^{13}\ \text{cm}^{-1},$$

le potentiel $V_0(r)$ et la fonction ψ_0 sont donnés par [1], [8]

$$V_0(r) = \frac{2\mu'(1+\mu')a'^2 e^{-a'r}}{[1+\mu'(1-e^{-a'r})]^2}, \tag{44}$$

$$\psi_0 = e^{-\gamma r}\left[1 - \frac{e^{-a'r}}{1+\mu'(1-e^{-a'r})}\right], \tag{45}$$

$$4\delta = 1{,}466 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}.$$

En portant toutes ces valeurs dans l'expression de $G(\lambda)$ et en traçant la courbe de variation de celle-ci en fonction de λ, on s'aperçoit qu'elle est toujours croissante (*fig.* 1); ce qui montre que la solution de notre équation en λ est unique.

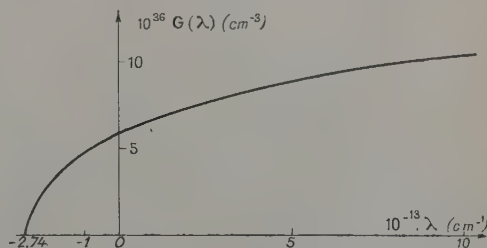


Fig. 1. — Représentation de la fonction $G(\lambda)$ définie par l'équation (36) pour les valeurs des fonctions $F(r)$ et ψ_0 données par (43) et (45).

Conformément à la formule générale (38), la forme asymptotique du second membre de (35)

est donnée par

$$\frac{\pi}{3}\frac{e^2}{\hbar C}\left(\frac{\hbar}{MC}\right)^2\gamma^2(\mu_N-\mu_P)^2\,G(\lambda)$$
$$\simeq 1{,}38\left[\mathrm{Log}\left(\frac{\lambda}{8\gamma}e^{2\varepsilon\gamma}\right)\right]^2.10^{-42}\ \mathrm{cm}^3. \qquad (46)$$

Les mesures de $\sigma_{dés}$ ne sont pas actuellement assez précises pour permettre de faire une bonne estimation de $\frac{d\sigma_{dés}}{dk}$ (o). Nous pouvons toutefois admettre une borne inférieure pour cette pente en supposant qu'elle est supérieure à la pente de la droite qui joint l'origine au point expérimental qui se trouve le plus près de l'origine. D'après les mesures de Bishop [9] on a

$\sigma_{dés} = 12.10^{-28}$ cm² pour une énergie de 2,504 MeV.

Ce qui nous donne pour la borne inférieure admise :

$$\frac{d\sigma_{dés}}{dk}(o) > 12.10^{-40}\ \mathrm{cm}^3.$$

Cette valeur étant suffisamment grande, nous pouvons remplacer le second membre de (35) par sa forme asymptotique (46). De là on tire une valeur de λ égale à

$\lambda_0 = 2{,}8.10^8$ en unités de 10^{13} cm^{-1}.

A cette valeur de λ correspond un maximum de la fonction d'onde du deutéron de l'ordre de 40.10^{-13} cm, soit plus de neuf fois le rayon du deutéron.

Remarquons que dans le cas où la pente $\frac{d\sigma_{dés}}{dk}$ (o) serait infinie, ce qui correspond à une valeur infinie du paramètre λ, le potentiel existe; il est égal à

$$V_\infty(r) = V_0(r) + \frac{4\psi_0\psi_0'}{\int_r^\infty \psi_0^2\,dt} + \frac{2\psi_0^4}{\left[\int_r^\infty \psi_0^2\,dt\right]^2}. \qquad (47)$$

La valeur λ_0 trouvée plus haut étant suffisamment grande, le potentiel $V_l(r)$ est très voisin de $V_\infty(r)$ (*fig.* 2).

L'exemple que nous venons de traiter a simplement pour but d'illustrer la méthode générale donnée précédemment. Les valeurs de $V_l(r)$ que nous pouvons en déduire ne peuvent pas être considérées trop sérieusement, car la loi de variation de déphasages que nous avons supposée n'est valable que pour les énergies faibles.

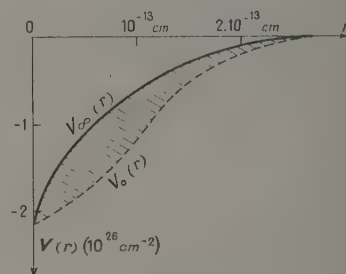


Fig. 2. — La courbe de variation de $V_0(r)$ et de $V_\infty(r)$. Le potentiel $V_l(r)$ correspondant à la valeur λ_0 du paramètre λ est pratiquement confondu avec $V_\infty(r)$. D'ailleurs, quelle que soit la valeur de λ, le potentiel $V(\lambda, r)$ se situe entre $V_0(r)$ et $V_\infty(r)$.

Remarquons pour terminer que le fait d'avoir négligé la force tenseur est une restriction importante qu'il est intéressant de lever. Le problème de la détermination exacte du potentiel dans le cas de la force tenseur, quoique notablement plus compliqué que dans le cas d'une force centrale, paraît néanmoins soluble et mériterait d'être traité en détail.

Le sujet de ce travail m'a été proposé par M. Maurice Lévy, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris. Je tiens à le remercier pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer et à lui exprimer ma respectueuse reconnaissance. Je remercie également Mlle Alix Valentin pour son précieux concours dans les calculs numériques.

Manuscrit reçu le 4 juin 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Jost R. et Kohn W. — *Phys. Rev.*, 1952, **87**, 977.
[2] Jost R. et Kohn W. — *Phys. Rev.*, 1952, **88**, 382.
[3] Levinson N. — *Kgl. Dansk. Videnskab Selsab, Mat.-fys. Medd.*, 1949, **25**, n° 9.
[4] Levison N. — *Phys. Rev.*, 1953, **89**, 755.
[5] Gel'fand I. M. et Levitan B. M. — *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, nouv. série, 1951, **77**, 557.
[6] Gel'fand I. M. et Levitan B. M. — *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 1951, **15**, 309.
[7] Blatt J. M. et Weisskopf V. F. — Theoretical Nuclear Physics, chap. II, 3 : N-P scattering; chap. XII, 1, 2, 3, 4 : Nuclei and E. M. Radiation.
[8] Jost R. — *Helv. Phys. Acta*, 1947, **20**, 256.
[9] Bishop. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 211.

CARACTÉRISTIQUES DU MONTAGE OPTIQUE D'UN SCINTILLATEUR

Par Yves KOECHLIN,

Service des Constructions électriques,
Centre d'Étude nucléaire de Saclay, Gif-sur-Yvette.

Sommaire. — Le problème du couplage optique d'un scintillateur sur un photomultiplicateur (P. M.) est étudié. On a cherché en particulier à déterminer dans quelle mesure la proportion p de lumière d'une scintillation, qui atteint la photocathode du P. M., dépend de la nature du revêtement du scintillateur, de la forme de ce dernier et de l'endroit où se produit la scintillation dans le scintillateur.

Introduction. — On sait que le scintillateur et le photomultiplicateur (P. M.) constituent les deux parties essentielles du détecteur à scintillations [1]. Or, la réalisation de ce dernier impose non seulement l'étude des problèmes relatifs à chacun de ces deux éléments, mais encore la mise au point du montage optique du scintillateur sur le P. M., montage particulièrement délicat lorsque le détecteur à scintillations est utilisé dans le but de tracer le spectre énergétique des particules qu'il détecte. L'étude de quelques aspects de ce problème a été abordé et les résultats en sont résumés ici.

1. Fonctionnement du détecteur à scintillations. — Lorsqu'une particule chargée perd une énergie E le long de son parcours dans le scintillateur, il apparaît à l'anode du P. M. une impulsion de charge Q, reliée à E par la relation suivante [1] :

$$Q = E r p \gamma \sigma^m, \tag{1}$$

dans laquelle r est le rapport $\frac{N}{E}$, N étant le nombre de photons lumineux produits dans le scintillateur par la particule d'énergie E; p la proportion de ces N photons qui atteint la photocathode du P. M.; γ le rendement quantique de celle-ci et σ le coefficient d'émission secondaire des m dynodes du P. M.. Q est affecté de fluctuations statistiques [2], [3], introduites par r, γ et σ et l'on peut écrire la relation (2) qui donne l'écart quadratique moyen relatif

$$\frac{\overline{\Delta Q}^2}{Q^2} = \frac{1}{N} + \frac{1}{\gamma p N} + \frac{1}{\sigma \gamma p N} + \frac{1}{\sigma^2 \gamma p N} + \ldots + \frac{1}{\sigma^m \gamma p N}. \tag{2}$$

Dans les deux formules précédentes, les quatre grandeurs r, γ, σ et p jouent un rôle distinct. Alors que les trois premières dépendent uniquement de la nature du scintillateur ou du P. M., la grandeur p est déterminée essentiellement par les conditions optiques du montage du scintillateur sur le P. M. Nous ne nous occuperons dans ce qui suit que de p, en admettant que les trois autres grandeurs ont déjà fait l'objet de réglages appropriés. Dans le cas où le détecteur à scintillations doit fournir des renseignements précis sur l'énergie des particules qu'il détecte, il doit répondre en particulier aux conditions suivantes : 1° $\frac{Q}{E}$ ne doit pas varier, c'est-à-dire que p doit être constant et 2° $\frac{\overline{\Delta Q}^2}{Q^2}$ doit être aussi réduit que possible, c'est-à-dire que p doit être grand.

Autrement dit il faut faire porvenir à la photocathode du P. M. une fraction aussi grande que possible des photons émis lors d'une scintillation et rendre cette fraction indépendante du lieu où cette scintillation s'est produite. La solution généralement adoptée [4] consiste à disposer sur un scintillateur parfaitement transparent un revêtement diffusant. Nous en tenant à cette solution, nous avons cherché à déterminer dans quelle mesure p était fonction de la nature du pigment diffusant, de la forme du scintillateur, et de l'endroit où se fait la scintillation dans ce dernier.

2. Comparaison de pigments diffusants. — Cette comparaison porte sur les propriétés diffusantes et absorbantes de plusieurs échantillons dont le tableau I donne la liste. Le pigment à étudier est déposé sur une plaque en verre constituant une

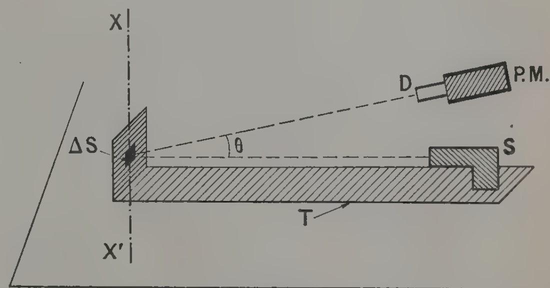


Fig. 1 — Appareillage pour la comparaison de pigments diffusants.

Un pinceau de lumière bleue est fourni par S, et tombe perpendiculairement sur le centre de la surface à étudier ΔS. Cette surface est fixée ainsi que S, à un bâti T qui peut tourner autour d'un axe XX' passant par le centre de ΔS. La photocathode d'un P.M. 931 A-R. C. A. reçoit la lumière renvoyée par ΔS dans un angle solide ΔΩ délimité par un diaphragme D. On peut faire varier l'angle θ que fait le faisceau incident avec le faisceau réfléchi intercepté par le P. M. L'ensemble est disposé dans une enceinte noire.

petite surface ΔS qu'un faisceau lumineux, de longueur d'onde comprise entre 3 500 et 5 000 Å et d'intensité constante, éclaire perpendiculairement. La mesure consiste à noter le courant Δi_θ débité par un P. M. placé comme l'indique la figure 1. Ce courant est alors proportionnel à l'intensité lumineuse I_θ renvoyée par ΔS dans l'angle solide ΔΩ et dans la direction faisant l'angle θ avec le faisceau incident.

TABLEAU I.

Pigments étudiés.

N° de référence des pigments.	Nature du pigment.
1........	Magnésie Prolabo fixée à l'acétone
2........	Magnésie Prolabo fixée par un mélange de collodion et d'acétate d'amyle
3........	Magnésie Prolabo fixée par du polystyrolène dissous
4........	Magnésie déposée par combustion de magnésium
5........	Alumine fixée à l'alcool
6........	Sulfate de zinc fixé à l'acétone
7........	Carbonate de plomb fixé à l'alcool
8........	Carton bristol blanc

a. Propriétés diffusantes. — Les résultats groupés dans le tableau II permettent de tracer l'indicatrice [1] de ΔS relative à chaque pigment, et de comparer ainsi leur propriétés diffusantes.

Nous avons trouvé que ces indicatrices suivent pratiquement la loi en cos θ et nous avons représenté sur la figure 2 celle correspondant au pigment 1 (référence du tableau I).

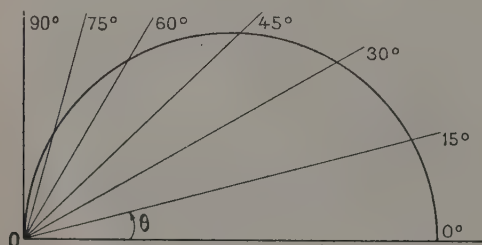


Fig. 2. — Indicatrice du pigment 1 (Référence du tableau I).

Représentation en coordonnées polaires du courant Δi_θ en fonction de l'angle θ. 1 cm correspond à 10^{-7} A.

b. Propriétés absorbantes. — Les pigments diffèrent cependant les uns des autres par leur absorption *A* définie par l'expression (3)

$$A = 1 - \frac{\Phi}{\Phi_1}, \qquad (3)$$

dans laquelle Φ est le flux renvoyé par la surface ΔS dans un angle solide 2π, lorsque cette dernière reçoit le flux incident Φ_1 (*fig.* 1). Φ est l'intégrale de l'expression (4)

$$\Delta\Phi_\theta = 2\pi I_\theta \sin\theta\, \Delta\theta, \qquad (4)$$

où le produit $I_\theta \Delta\theta$ représente le flux renvoyé par ΔS dans l'angle solide délimité par les deux cônes d'ouverture θ et (θ + Δθ). En admettant que le carbonate de plomb fixé à l'alcool présente une absorption *A* de 12 pour 100 environ [2], nous avons calculé par comparaison les valeurs de *A* correspondant aux autres pigments, à l'aide des valeurs du tableau II et des expressions (3) et (4).

TABLEAU II.

θ°. N°...	Courant débité par le P. M. en 10^{-7} A.							
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
0....	20	19	19	18	20	18,7	19	19,5
15....	19,5	18,2	18,5	17,5	18,7	17,5	18,2	16,5
30....	17,5	16	16,2	15,5	16,7	15,2	16	13,7
45....	13,8	12,7	12,7	12,5	13,2	11,7	13	11,7
60....	9	9	9	9	9	8,5	9	7,5
75....	4,7	4,5	4,5	4,7	4,7	4,2	4,5	3,7
90....	1	1	1	1	0,7	0,5	1	1

Les valeurs de *A* ainsi calculées sont groupées dans le tableau III.

TABLEAU III.

Absorption A des différents pigments.

N° de référence des pigments...	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A (pour 100)....	7	12	12	13	10	18	12	15

c. Influence de A sur p. — Considérons une scintillation qui se produit dans un scintillateur à parois diffusantes (*fig.* 3). Une fraction α_0 de la lumière émise tombe directement sur la photocathode du P. M. tandis que le reste est envoyé sur les parois

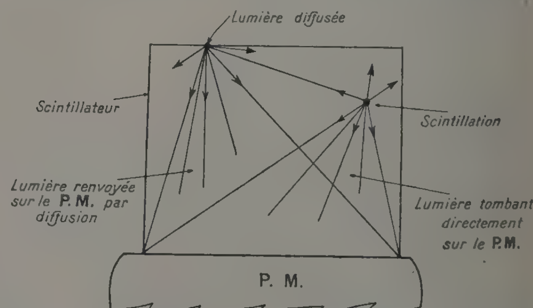


Fig. 3. — Cheminement de la lumière dans un scintillateur.

[1] On porte dans chaque direction, à partir de ΔS, un vecteur de longueur proportionnelle à l'intensité *I* correspondante. Le lieu des extrémités de ces vecteurs est par définition l'indicatrice d'émission de ΔS.

[2] Valeur tirée du *Handbook of Chemistry and Physics*, 33e édit., p. 2451.

du scintillateur. Celles-ci absorbent une partie A et rediffusent le reste $(1-A)$, en partie sur la photocathode, et en partie sur les parois. Ce processus recommence jusqu'à la disparition des photons qui sont ainsi absorbés peu à peu par la photocathode et les parois du scintillateur. On peut admettre que la fraction de lumière $\alpha(1-A)$ renvoyée par l'ensemble des parois diffusantes sur la photocathode est la même à chaque processus, ce qui permet de calculer la relation (5) donnant p en fonction de A :

$$p = \alpha_0 + \frac{1-\alpha_0}{1+\frac{A}{\alpha(1-A)}}. \tag{5}$$

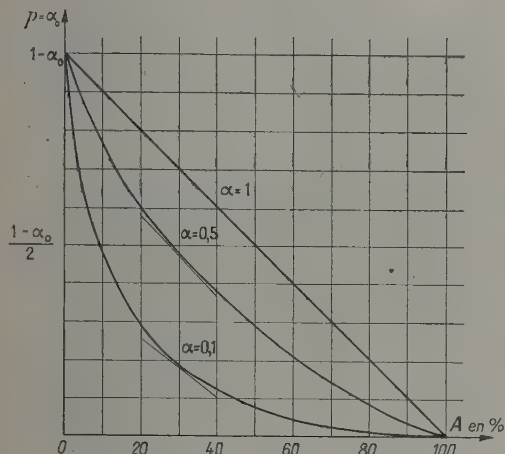


Fig. 4. — Représentation de la fonction $f(A) = p - \alpha_0$.

La figure 4 représente la fonction $f(A) = p - \alpha_0$ avec α comme paramètre.

On voit que pour les valeurs de A groupées dans le tableau III, les variations de p par rapport à A deviennent importantes si α est petit.

3. Influence de la forme du scintillateur et du lieu de la scintillation.

— Afin de déterminer les variations de la grandeur P en fonction du lieu où la scintillation se produit dans le scintillateur, nous avons réalisé les mesures suivantes : on note le courant débité par une cellule photoélectrique, au-dessus de laquelle est placée une source lumineuse suffisamment ponctuelle et qui figure une scintillation. Autour de l'ensemble source-cellule est disposé un diffuseur constitué par une forme creuse recouverte intérieurement de lait de magnésie, et représentant les parois du scintillateur. Les mesures se font en fonction de la position de la lampe, à l'aide de l'appareillage décrit dans la légende de la figure 5.

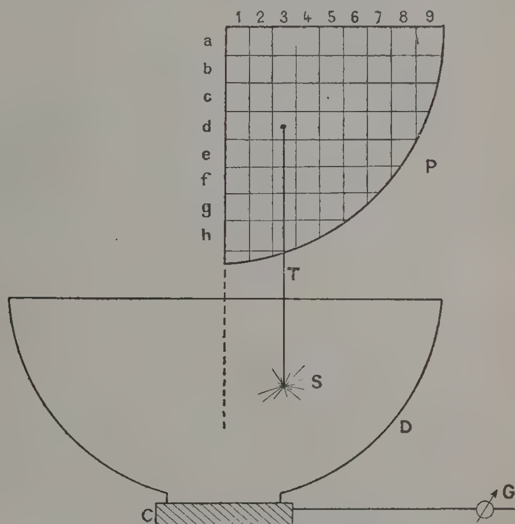


Fig. 5. — Appareillage pour l'étude de diffuseurs. La source de lumière S est un néon alimenté à travers 75 kΩ par une tension de 100 V. Elle est fixée à une tige verticale T dont l'extrémité est maintenue sur un panneau vertical P. Les positions de la source S dans l'enceinte diffusante D sont repérées sur ce dernier à l'aide d'un quadrillage. La verticale 1 est située dans l'axe de symétrie des diffuseurs. Le courant débité par la cellule C est lu sur un galvanomètre G.

Hémisphère

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	100	94	97	94	94	92	92	91	90
b	101	96	100	96	97	96	94	94	90
c	101	97	103	99	99	96	96		
d	104	101	106	100	100	97	94		
e	110	104	110	101	101	101	99		
f	121	112	116	108	104	100			
g	137	127	125	108	106				
h	167	103	125	116					

Cône

	1	2	3	4	5	6
a	100	93	98	90	93	90
b	100	95	100	93	95	
c	106	100	95	95	98	
d	110	108	110	100		
e	120	120	120	112		
f	140	145	135			
g	200	185				

Cylindre

	1	2	3	4
a	100	99	99	95
b	107	107	106	102
c	116	116	116	114
d	125	125	124	114
e	139	139	137	125
f	150	148	146	134
g	173	164	141	134

Fig. 6. — Résultats des mesures obtenues avec différents diffuseurs. On a représenté dans chaque cas le panneau P de la figure 5. Les valeurs qui figurent dans les cases correspondent au courant de la cellule, rapportée à la valeur 100 pour la case 1 *a*.

Nous avons choisi trois diffuseurs de forme simple : hémisphérique, conique et cylindrique. Les résultats des mesures sont groupés dans la figure 6, et nous en avons tiré les courbes de la figure 7, qui permettent de comparer les diffuseurs entre eux. On voit que les trois diffuseurs présentent des caractéristiques analogues, et que les variations de p sont très atténuées. En effet p ne varie que d'un facteur 2 lorsque S passe des positions $1a$ à $1g$, alors que sans diffuseur il varierait d'un facteur 16.

4. Application à différents scintillateurs usuels et à un conduit de lumière. — La méthode de mesure employée dans cette étude ne permet pas de tenir compte de l'indice de réfraction du scintillateur non plus que de son pouvoir absorbant vis-à-vis de la lumière émise par les scintillations qui s'y produisent. Cette lumière ne peut s'échapper librement du scintillateur par suite des réflexions totales qu'elle subit au niveau des surfaces de séparation entre le scintillateur et le milieu extérieur à lui, quand celui-ci est d'indice plus faible. Nous avons donc résumé dans le tableau IV quelques données relatives aux caractéristiques optiques de différents scintillateurs usuels. Nous avons en outre mesuré la hauteur des impulsions que délivre l'anode d'un P. M. E. M. I. 6260 (³), dont la photocathode voit les scintillations provoquées par les γ du ^{137}Cs dans un cylindre de NaI(Tl), en fonction de différentes conditions de couplage optique avec le P. M. Le tableau V groupe les résultats de ces mesures.

Nous avons d'autre part déterminé les caractéristiques d'un conduit de lumière adapté au P. M. de l'Observatoire de Paris, à cathode sur le côté. Ce P. M. est en effet logé dans un boîtier étanche

(³) Le gain du P.M. était de 10^6, la résistance d'anode de 150 kΩ, et la capacité de 50 pF environ.

TABLEAU IV.

Caractéristiques optiques de différents scintillateurs et du plexiglass de forme parallélépipédique.

	a.	*n.*	*f.* (pour 100).
Liquides fluorescents...	10 pour 100 pour 10 cm	1,5	12,7
Plastiques fluorescents..	10 pour 100 pour 10 cm	1,6	11
Na I (Tl)..............	Négligeable (*)	1,77	8,7
Anthracène..........	»	1,59	11
Plexiglass............	Inférieur à 10 pour 100 pour 10 cm	1,5	12,7

(*) Pour les dimensions réalisables actuellement.
a. Absorption pour une lumière dont la longueur d'onde est de 4 500 Å environ.
n. Indice de réfraction moyen.
f. Fraction de lumière sortant par face en contact avec l'air [5].

Nota. — La fraction f devient voisine de 100 pour 100 lorsque la face du scintillateur est en contact optique avec la face de la photocathode d'un E. M. I.-6260, dont l'indice de réfraction est de l'ordre de 1,5 (borosilicate mou).

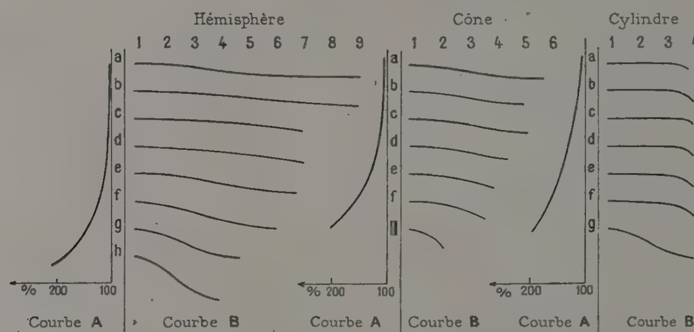


Fig. 7. — Courbes obtenues avec les résultats de la figure 6.

Les courbes A représentent les variations du courant de la cellule en fonction des positions de S sur la verticale 1; les valeurs indiquées sont celles de la figure 5. Les courbes B représentent les variations du courant de la cellule en fonction des positions de S sur chaque horizontale; les valeurs indiquées sont en pour-cent des valeurs correspondantes de la verticale 1 de la figure 5. 1 cm correspond à une variation de 20 pour 100.

TABLEAU V.

Comparaison des couplages optiques du NaI(Tl) *et d'un* E. M. I.-6260.

Dispositions optiques.	Amplitudes des impulsions en volts
NaI(Tl) sans revêtement et posé à sec sur la photocathode..............................	1
NaI(Tl) sans revêtement et posé par l'intermédiaire d'huile silicone sur la photocathode......	1,6
NaI(Tl) avec revêtement MgO et posé à sec sur la photocathode..........................	1,4
NaI(Tl) avec revêtement MgO et posé par l'intermédiaire d'huile silicone sur la photocathode.	2,6

cylindrique et il est difficile de lui adjoindre directement un scintillateur. Nous avons donc mesuré

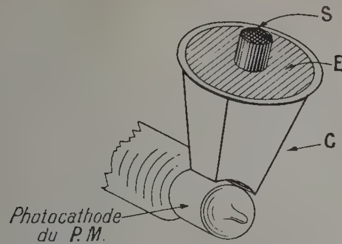


Fig. 8. — Appareillage de mesure des caractéristiques d'un conduit de lumière.

La source canalisée S (particules α) est disposée au-dessus de l'écran E au sulfure de zinc, lui-même placé contre la surface plane du conduit de lumière C. La fixation de C au P. M. est réalisée par du fluide silicone. Un galvanomètre placé dans le circuit anodique du P. M. permet la lecture du courant.

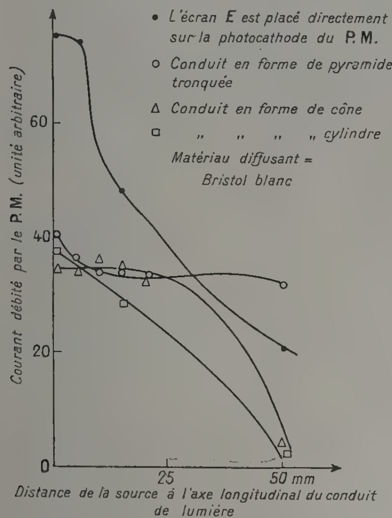


Fig. 9. — Influence de l'emplacement de la scintillation sur l'écran diffusant et de la forme du conduit de lumière.

son courant anodique lorsque sa photocathode voit une source lumineuse ponctuelle à travers le conduit étudié. Les mesures se font en fonction de l'emplacement de cette source, constituée par un écran de ZnS-Ag au-dessus duquel est disposée une source canalisée de particules α (*fig.* 8). Les courbes des figures 9 et 10 résument les résultats des mesures. La figure 9 montre que c'est en utilisant le conduit de lumière en forme de pyramide tronquée que p reste le plus constant. La figure 10 représente les courbes relatives à un conduit de lumière en plexi-

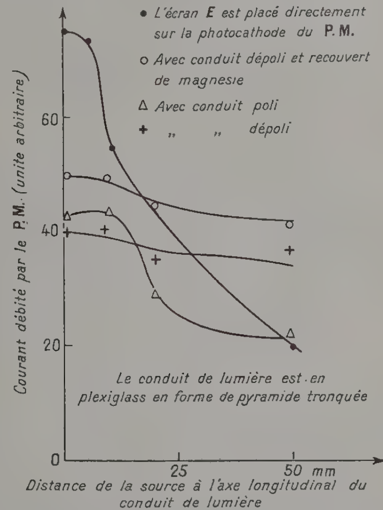


Fig. 10. — Influence de l'emplacement de la scintillation sur l'écran scintillant et de la nature de la surface diffusante.

glass, taillé en forme de pyramide tronquée et parfaitement jointif au P. M. Les résultats sont différents suivant que le conduit est poli, dépoli, ou dépoli et recouvert de magnésie.

L'ensemble de cette étude montre que le fait de recouvrir un scintillateur par un pigment diffusant permet : 1° d'augmenter d'un facteur 2 environ la proportion de lumière collectée par la photocathode du P. M.; 2° d'utiliser un scintillateur de forme quelconque, et 3° d'homogénéiser la réponse du compteur à scintillations, suivant le lieu où naît la scintillation dans le scintillateur.

Manuscrit reçu le 7 mai 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Birks J. B. — Scintillation Counters, Pergamon Press, London, 1953.
[2] Morton G. A. — Photomultipliers for Scintillation Counting. *R. C. A. Review*, 1949, **10**, n° 4.
[3] Maignan P., Blanc D. et Detœuf J. F. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 661.
[4] Harshaw J. A. — N.Y.O. 1577. Technical Information Service, Oak Ridge, Tennessee.
[5] Shurcliff et Clark Jones R. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1949, **11**, 912.

SUR LE COMMUTATEUR DE DEUX POLYNOMES HOMOGÈNES. APPLICATION AU CALCUL DE L'ÉNERGIE DE VIBRATION D'UNE MOLÉCULE POLYATOMIQUE

Par GILBERT AMAT [1], MARK GOLDSMITH et HARALD H. NIELSEN,
Department of Physics and Astronomy,
The Ohio State University, Columbus, Ohio (États-Unis).

Sommaire. — Il est proposé dans cet article un certain nombre de formules générales permettant de calculer directement le commutateur $[A, B] = AB - BA$ dans lequel A et B sont des polynomes homogènes d'un certain nombre de coordonnées q_s et de leurs moments conjugués p_s.

Cette méthode synthétique permet de résoudre, beaucoup plus rapidement que la méthode analytique utilisée jusqu'ici, les problèmes de commutation auxquels on est amené quand on effectue un calcul de perturbation du second ordre ou d'un ordre plus élevé par la méthode de Van Vleck.

Les formules générales obtenues sont utilisées pour calculer l'énergie de vibration d'une molécule polyatomique suivant la méthode de H. H. Nielsen.

Introduction. — Il arrive assez fréquemment en mécanique quantique que l'on ait à calculer des commutateurs $[A, B] = AB - BA$, dans lesquels A et B sont des polynomes homogènes d'un certain nombre de coordonnées q_s et de leurs moments conjugués p_s. Un tel problème se pose en particulier lorsqu'on effectue un calcul de perturbation du deuxième ordre ou d'un ordre plus élevé en utilisant la méthode de Van Vleck [1], c'est-à-dire en effectuant une transformation de contact choisie de façon à simplifier l'expression de l'opérateur de perturbation du premier ordre.

Or, compte tenu du fait qu'une relation telle que

$$[p_s p_{s'}, q_s q_{s''}] = -i\hbar p_{s'} q_{s''}$$

cesse d'être valable dès que deux quelconques des indices s, s', s'' deviennent identiques, il apparaît que le calcul de $[A, B]$ se ramène au calcul d'un certain nombre de commutateurs correspondant aux différentes possibilités d'égalité entre deux ou plusieurs des indices caractérisant les p et les q. Supposons, par exemple, que

$$A = \sum_{\substack{ss's'' \\ s<s'<s''}} A_{ss's''} p_s p_{s'} p_{s''}, \qquad B = \sum_{\substack{ss's'' \\ s<s'<s''}} K_{ss's''} q_s q_{s'} q_{s''}.$$

Un tel commutateur $[A, B]$ apparaît lorsqu'on calcule l'énergie de vibration d'une molécule polyatomique, en utilisant la méthode de Shaffer, Nielsen et Thomas [2], problème qui fera l'objet d'une application dans la troisième partie du présent article. Conformément à ce qui vient d'être dit, A et B doivent être écrits sous la forme

$$A = \sum_s A_{sss} p_s^3 + \sum_{\substack{ss' \\ s \neq s'}} A_{sss'} p_s^2 p_{s'} + \sum_{\substack{ss's'' \\ s<s'<s''}} A_{ss's''} p_s p_{s'} p_{s''},$$

$$B = \sum_s K_{sss} q_s^3 + \sum_{\substack{ss' \\ s \neq s'}} K_{sss'} q_s^2 q_{s'} + \sum_{\substack{ss's'' \\ s<s'<s''}} K_{ss's''} q_s q_{s'} q_{s''}.$$

On est donc amené à considérer neuf commutateurs différents, pour certains desquels le problème doit être décomposé à nouveau. Pour

$$\left[\sum_{\substack{ss' \\ s \neq s'}} A_{sss'} p_s^2 p_{s'}, \sum_{\substack{ss' \\ s \neq s'}} K_{sss'} q_s^2 q_{s'} \right],$$

par exemple, il faut distinguer six cas correspondant aux possibilités suivantes :

$$[p_s^2 p_{s'}, q_s^2 q_{s''}], \quad [p_{s'}^2 p_s, q_{s''}^2 q_s], \quad [p_s^2 p_{s'}, q_{s''}^2 q_s],$$
$$[p_{s'}^2 p_s, q_s^2 q_{s''}], \quad [p_s^2 p_{s'}, q_s^2 q_{s'}], \quad [p_s^2 p_{s'}, q_{s'}^2 q_s],$$

et ainsi de suite.

Lorsqu'une telle décomposition est achevée, on se trouve en présence d'un grand nombre de termes, correspondant chacun à un commutateur simple dont la valeur peut être obtenue, en utilisant, par exemple, la table dressée par Herman et Shaffer [3].

L'objet de cet article est de proposer une méthode synthétique pour résoudre les problèmes de ce type, en établissant des formules générales permettant de calculer directement le commutateur $[A, B]$. On conçoit qu'une telle méthode conduira à des résultats beaucoup plus rapides que la méthode analytique dont le principe a été exposé ci-dessus.

(1) Actuellement au Laboratoire d'Infrarouge (P. C. B), Paris.

1. Calcul du commutateur de deux monomes. — Chacun des indices $s_1, s_2, \ldots, s_m, t_1, t_2, \ldots, t_n$ étant susceptible de prendre pour valeur l'un quelconque des nombres de la suite 1, 2, 3, ..., σ, nous nous proposons de calculer le commutateur $[p_{s_1}\ldots p_{s_m}, q_{t_1}\ldots q_{t_n}]$ quelles que soient les relations d'égalité pouvant exister entre les $m+n$ indices s et t.

Nous utiliserons dans ce qui va suivre des symboles α dont la définition est la suivante :

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_a\alpha_b = \delta_{ab},\\
&\alpha_{ab}\alpha_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc},\\
&\alpha_{abc}\alpha_{def} = \delta_{ad}\delta_{be}\delta_{cf} + \delta_{ad}\delta_{bf}\delta_{ce} + \delta_{ae}\delta_{bf}\delta_{cd}\\
&\qquad + \delta_{ae}\delta_{bd}\delta_{cf} + \delta_{af}\delta_{bd}\delta_{ce} + \delta_{af}\delta_{be}\delta_{cd},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$(\delta_{ab} = 0 \quad \text{si } a \neq b; \qquad \delta_{ab} = 1 \quad \text{si } a = b).$$

Plus généralement, le produit $\alpha_{abc\ldots}\ \alpha_{xyz\ldots}$ de deux α à p indices est une somme de $p\,!$ termes correspondant aux différentes manières d'écrire le produit de p symboles de Kronecker δ_{ij} (i étant égal à l'un des indices $abc\ldots$ caractérisant le premier α, et j étant égal à l'un des indices $xyz\ldots$ caractérisant le deuxième α).

En partant de la relation

$$[p_a, q_b] = -i\hbar\alpha_a\alpha_b$$

et en utilisant les formules

$$\left.\begin{aligned}
&[AB, C] = [A, C]B + A[B, C];\\
&[A, BC] = [A, B]C + B[A, C],
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

on obtient aisément, de proche en proche, les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
[p_a, q_bq_c] &= -i\hbar(\alpha_bq_c + \alpha_cq_b)\alpha_a,\\
[p_ap_b, q_c] &= -i\hbar\alpha_c(\alpha_ap_b + \alpha_bp_a),\\
[p_ap_b, q_cq_d] &= -i\hbar(\alpha_cq_d + \alpha_dq_c)(\alpha_ap_b + \alpha_bp_a)\\
&\quad - \hbar^2\alpha_{cd}\alpha_{ab},\\
[p_ap_b, q_cq_dq_e] &= -i\hbar(\alpha_cq_dq_e + \alpha_dq_eq_c + \alpha_eq_cq_d)\\
&\quad \times(\alpha_ap_b + \alpha_bp_a)\\
&\quad - \hbar^2(\alpha_{cd}q_e + \alpha_{de}q_c + \alpha_{ec}q_d)\alpha_{ab},\\
[p_ap_bp_c, q_dq_e] &= -i\hbar(\alpha_dq_e + \alpha_eq_d)\\
&\quad \times(\alpha_ap_bp_c + \alpha_bp_cp_a + \alpha_cp_ap_b)\\
&\quad - \hbar^2\alpha_{de}(\alpha_{ab}p_c + \alpha_{bc}p_a + \alpha_{ca}p_b),\\
[p_ap_bp_c, q_dq_eq_f] &= -i\hbar(\alpha_dq_eq_f + \alpha_eq_fq_d + \alpha_fq_dq_e)\\
&\quad \times(\alpha_ap_bp_c + \alpha_bp_cp_a + \alpha_cp_ap_b)\\
&\quad - \hbar^2(\alpha_{de}q_f + \alpha_{ef}q_d + \alpha_{fd}q_e)\\
&\quad \times(\alpha_{ab}p_c + \alpha_{bc}p_a + \alpha_{ca}p_b)\\
&\quad + i\hbar^3\alpha_{def}\alpha_{abc},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On peut démontrer par récurrence la formule générale

$$\begin{aligned}
&[p_{s_1}p_{s_2}\cdots p_{s_m}, q_{t_1}q_{t_2}\cdots q_{t_n}]\\
&\quad = (-i\hbar)\,R_n^{n-1}(q_{t_1}\ldots q_{t_n})\,R_m^{m-1}(p_{s_1}\ldots p_{s_m})\\
&\qquad + (-i\hbar)^2R_n^{n-2}(q_{t_1}\ldots q_{t_n})\,R_m^{m-2}(p_{s_1}\ldots p_{s_m}) + \ldots, \qquad (3)
\end{aligned}$$

le dernier terme étant

$$(-i\hbar)^n R_n^0(q_{t_1}\ldots q_{t_n})\,R_m^{m-n}(p_{s_1}\ldots p_{s_m}) \quad \text{si } m \geq n.$$
$$(-i\hbar)^m R_n^{n-m}(q_{t_1}\ldots q_{t_n})\,R_m^0(p_{s_1}\ldots p_{s_m}) \quad \text{si } n \geq m.$$

La définition des R est la suivante :

$$\begin{aligned}
R_1^0(r_a) &= \alpha_a;\\
R_2^1(r_a, r_b) &= \alpha_ar_b + \alpha_br_a,\\
R_2^0(r_a, r_b) &= \alpha_{ab};\\
R_3^2(r_a, r_b, r_c) &= \alpha_ar_br_c + \alpha_br_cr_a + \alpha_cr_ar_b,\\
R_3^1(r_a, r_b, r_c) &= \alpha_{ab}r_c + \alpha_{bc}r_a + \alpha_{ca}r_b,\\
R_3^0(r_a, r_b, r_c) &= \alpha_{abc};\\
R_4^3(r_a, r_b, r_c, r_d) &= \alpha_ar_br_cr_d + \alpha_br_cr_dr_a\\
&\quad + \alpha_cr_dr_ar_b + \alpha_dr_ar_br_c,\\
R_4^2(r_a, r_b, r_c, r_d) &= \alpha_{ab}r_cr_d + \alpha_{ac}r_br_d + \alpha_{ad}r_br_c\\
&\quad + \alpha_{bc}r_ar_d + \alpha_{bd}r_ar_c + \alpha_{cd}r_ar_b,\\
R_4^1(r_a, r_b, r_c, r_d) &= \alpha_{abc}r_d + \alpha_{bcd}r_a + \alpha_{cda}r_b + \alpha_{dab}r_c,\\
R_4^0(r_a, r_b, r_c, r_d) &= \alpha_{abcd};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

D'une manière générale le nombre de termes de R_j^i est égal au nombre de combinaisons

$$\binom{j}{i} = \frac{j!}{i!(j-i)!}$$

que l'on peut écrire avec i opérateurs r (à un indice) et un coefficient α à $(j-i)$ indices.

Ainsi qu'il résulte de la définition des α, on peut ne retenir dans le polynome $R_n^i\ (q_{t_1}\ldots q_{t_n})$ que les termes possédant un coefficient α dont chacun des $n-i$ indices est égal à l'un au moins des indices $s_1, s_2, \ldots, s_m$ caractérisant les p. On peut de même, dans le polynome $R_m^i\ (p_{s_1}\ldots p_{s_m})$, ne retenir que les termes possédant un coefficient α dont chacun des $m-i$ indices est égal à l'un au moins des indices $t_1, t_2, \ldots, t_n$ caractérisant les q.

L'équation (3) peut s'écrire sous la forme condensée

$$\begin{aligned}
&[p_{s_1}p_{s_2}\cdots p_{s_m}, q_{t_1}q_{t_2}\cdots q_{t_n}]\\
&\qquad = \sum_{l=1}^{l=\rho}(-i\hbar)^l R_n^{n-l}(q)\,\mathrm{R}_m^{m-l}(p), \qquad (4)
\end{aligned}$$

ρ désignant le plus petit des deux nombres m et n, $R_n^{n-l}(q)$ et $R_m^{n-l}(p)$ étant écrits respectivement pour $R_n^{n-l}(q_{t_1}\ldots q_{t_n})$ et $R_m^{m-l}\ (p_{s_1}\ldots p_{s_m})$.

Remarques. — 1. Compte tenu du fait qu'on a le droit d'échanger les p et les q à condition de remplacer i par $-i$ dans les formules de commutation, l'équation (4) peut encore s'écrire [1]

$$\begin{aligned}
&[p_{s_1}p_{s_2}\cdots p_{s_m}, q_{t_1}q_{t_2}\cdots q_{t_n}]\\
&\qquad = -\sum_{l=1}^{l=\rho}(i\hbar)^l R_m^{m-l}(p)\,R_n^{n-l}(q) \qquad (5)
\end{aligned}$$

[1] Le signe — au deuxième membre de l'équation (5) vient évidemment de ce que

$$[A, B] = -[B, A].$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
[p_{s_1} \cdots p_{s_m}, q_{t_1} \cdots q_{t_n}]
= & \ \frac{1}{2} \sum_{l'=1}^{l'=\rho'} (-i\hbar)^{2l'-1} \Big(R_m^{m-2l'+1}(p)\, R_n^{n-2l'+1}(q) \\
& \qquad + R_n^{n-2l'+1}(q)\, R_m^{m-2l'+1}(p) \Big) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l'=1}^{l'=\rho''} (-i\hbar)^{2l'} [R_m^{m-2l'}(p), R_n^{n-2l'}(q)].
\end{aligned} \tag{6}
$$

$2\rho'-1$ et $2\rho''$ étant respectivement le plus grand nombre impair et le plus grand nombre pair inférieurs ou égaux à la fois à m et n.

2. Le cas du commutateur

$$[q_{t_1} q_{t_2} \cdots p_{s_1} p_{s_2} \cdots, q_{t'_1} q_{t'_2} \cdots p_{s'_1} p_{s'_2} \cdots]$$

se ramène aisément au cas précédent en utilisant les formules (2) :

$$
\begin{aligned}
& [q_{t_1} q_{t_2} \cdots p_{s_1} p_{s_2} \cdots, q_{t'_1} q_{t'_2} \cdots p_{s'_1} p_{s'_2} \cdots] \\
& \quad = q_{t_1} q_{t_2} \cdots [p_{s_1} p_{s_2} \cdots, q_{t'_1} q_{t'_2} \cdots] p_{s'_1} p_{s'_2} \cdots \\
& \qquad - q_{t'_1} q_{t'_2} \cdots [p_{s'_1} p_{s'_2} \cdots, q_{t_1} q_{t_2} \cdots] p_{s_1} p_{s_2} \cdots,
\end{aligned} \tag{7}
$$

d'où en particulier les deux relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
& [q_{t_1} q_{t_2} \cdots p_{s_1} p_{s_2} \cdots, q_{t'_1} q_{t'_2} \cdots] \\
& \quad = q_{t_1} q_{t_2} \cdots [p_{s_1} p_{s_2} \cdots, q_{t'_1} q_{t'_2} \cdots],
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
& [p_{s_1} p_{s_2} \cdots, q_{t'_1} q_{t'_2} \cdots p_{s'_1} p_{s'_2} \cdots] \\
& \quad = [p_{s_1} p_{s_2} \cdots, q_{t'_1} q_{t'_2} \cdots] p_{s'_1} p_{s'_2} \cdots.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Les équations (7) et (4) permettent donc de calculer de la façon la plus générale le commutateur $[A, B]$ de deux monomes A et B contenant chacun un nombre quelconque d'opérateurs p et q, à condition, s'il y a lieu, d'ordonner au préalable les deux monomes, en écrivant par exemple $q_{t_1} p_{s_1} q_{t_2} p_{s_2}$ sous la forme

$$q_{t_1} p_{s_1} q_{t_2} p_{s_2} = q_{t_1} q_{t_2} p_{s_1} p_{s_2} - i\hbar \delta_{s_1 t_2} q_{t_1} p_{s_2}.$$

2. **Calcul du commutateur de deux polynomes homogènes.** — L'équation (3) établie dans le paragraphe précédent pour le commutateur de deux monomes peut être étendue au cas du commutateur de deux polynomes homogènes. Il vient

$$
\begin{aligned}
& \Bigg[\Bigg(\sum_{\substack{s_1 s_2 \dots s_m \\ s_1 \leq s_2 \dots \leq s_m}} A_{s_1 s_2 \dots s_m} p_{s_1} p_{s_2} \cdots p_{s_m} \Bigg), \Bigg(\sum_{\substack{t_1 t_2 \dots t_n \\ t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n}} K_{t_1 t_2 \dots t_n} q_{t_1} q_{t_2} \cdots q_{t_n} \Bigg) \Bigg] \\
& \quad = (-i\hbar) \sum_{\substack{s_1 s_2 \dots s_{m-1} \\ s_1 \leq s_2 \dots \leq s_{m-1}}} \sum_{\substack{t_1 t_2 \dots t_{n-1} \\ t_1 \leq t_2 \dots \leq t_{n-1}}} \Gamma_{t_1 \dots t_{n-1}}^{s_1 \dots s_{m-1}} q_{t_1} q_{t_2} \cdots q_{t_{n-1}} p_{s_1} p_{s_2} \cdots p_{s_{m-1}} \\
& \qquad + (-i\hbar)^2 \sum_{\substack{s_1 s_2 \dots s_{m-2} \\ s_1 \leq s_2 \dots \leq s_{m-2}}} \sum_{\substack{t_1 t_2 \dots t_{n-2} \\ t_1 \leq t_2 \dots \leq t_{n-2}}} \Gamma_{t_1 \dots t_{n-2}}^{s_1 \dots s_{m-2}} q_{t_1} q_{t_2} \cdots q_{t_{n-2}} p_{s_1} p_{s_2} \cdots p_{s_{m-2}} + \dots
\end{aligned} \tag{10}
$$

Le dernier terme étant

$$(-i\hbar)^n \sum_{\substack{s_1 s_2 \dots s_{m-n} \\ s_1 \leq s_2 \dots \leq s_{m-n}}} \Gamma^{s_1 \dots s_{m-n}} p_{s_1} p_{s_2} \cdots p_{s_{m-n}} \quad \text{si } m \geq n,$$

$$(-i\hbar)^m \sum_{\substack{t_1 t_2 \dots t_{n-m} \\ t_1 \leq t_2 \dots \leq t_{n-m}}} \Gamma_{t_1 \dots t_{n-m}} q_{t_1} q_{t_2} \cdots q_{t_{n-m}} \quad \text{si } n \geq m.$$

La définition des Γ est la suivante :

$$\Gamma_{t_1 \dots t_{n-l}}^{s_1 \dots s_{m-l}} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \dots i_l \\ i_1 \leq i_2 \dots \leq i_l}} f_l A_{\substack{s_1 \dots s_{m-l} i_1 \dots i_l \\ s_1 \leq \dots \leq s_{m-l}}} g_l^{m-l} K_{\substack{t_1 \dots t_{n-l} i_1 \dots i_l \\ t_1 \leq \dots \leq t_{n-l}}} g_l^{n-}$$

où

$$
\left.
\begin{aligned}
& f_1 = 1, \\
& f_2 = 1 + \delta_{i_1 i_2}, \\
& f_3 = 1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_2 i_3} + 3\,\delta_{i_1 i_2 i_3}, \\
& f_4 = 1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_2 i_3} + \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \\
& \qquad + 3\,\delta_{i_1 i_2 i_3} + 3\,\delta_{i_2 i_3 i_4} + 13\,\delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
\right\} \tag{10'}
$$

(un δ à p indices étant égal à 1 lorsque les p indices sont identiques et égal à 0 dans tous les autres cas) et où

$$
\left.
\begin{aligned}
& \left.\begin{aligned} & g_1^1 = 1 + \delta_{s_1 i_1} \\ & g_2^0 = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & m = 2 \\ & \text{ou } n = 2; \end{aligned} \\
& \left.\begin{aligned} & g_1^2 = 1 + \delta_{s_1 i_1} + \delta_{s_2 i_1} \\ & g_2^1 = 1 + \delta_{s_1 i_1} + \delta_{s_1 i_2} \\ & g_3^0 = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & m = 3 \\ & \text{ou } n = 3; \end{aligned} \\
& \left.\begin{aligned} & g_1^3 = 1 + \delta_{s_1 i_1} + \delta_{s_2 i_1} + \delta_{s_3 i_1} \\ & g_2^2 = 1 + \delta_{s_1 i_1} + \delta_{s_1 i_2} + \delta_{s_2 i_1} \\ & \qquad + \delta_{s_2 i_2} + \delta_{s_1 i_1} \delta_{s_2 i_2} \\ & g_3^1 = 1 + \delta_{s_1 i_1} + \delta_{s_1 i_2} + \delta_{s_1 i_3} \\ & g_4^0 = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & m = 4 \\ & \text{ou} \\ & n = 4; \end{aligned} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\} \tag{10''}
$$

La forme générale des fonctions f et g sera discutée en Appendice.

Les deux remarques faites à la fin du premier paragraphe s'appliquent également au commutateur de deux polynomes.

A titre d'exemple, écrivons le commutateur $[A, B]$ pour les deux polynomes considérés dans l'introduction

$$\left[\left(\sum_{\substack{ss's''\\ s\leq s'\leq s''}} A_{ss's''}p_s p_{s'} p_{s''}\right), \left(\sum_{\substack{ss's''\\ s\leq s'\leq s''}} K_{ss's''}q_s q_{s'} q_{s''}\right)\right] = (-i\hbar)\sum_{\substack{ss's''s'''\\ s\leq s'\\ s''\leq s'''}} \Gamma^{ss'}_{s''s'''} q_{s''}q_{s'''}p_s p_{s'} - \hbar^2 \sum_{ss'} \Gamma^s_{s'} q_{s'} p_s + i\hbar^3 \Gamma, \quad (11)$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^{ss'}_{s''s'''} &= \sum_l \Big(A_{\substack{ss'l\\ s\leq s'}}(1+\delta_{sl}+\delta_{s'l}) \times K_{\substack{s''s'''l\\ s''\leq s'''}}(1+\delta_{s''l}+\delta_{s'''l})\Big),\\
\Gamma^s_{s'} &= \sum_{\substack{lm\\ l\leq m}} \Big((1+\delta_{lm})A_{slm}(1+\delta_{sl}+\delta_{sm}) \times K_{s'lm}(1+\delta_{s'l}+\delta_{s'm})\Big),\\
\Gamma &= \sum_{\substack{lmn\\ l\leq m\leq n}} (1+\delta_{lm}+\delta_{mn}+3\delta_{lmn})A_{lmn}K_{lmn}.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Conformément à la première remarque faite à la fin du premier paragraphe, l'équation (11) peut encore être écrite

$$\left[\left(\sum_{\substack{ss's''\\ s\leq s'\leq s''}} A_{ss's''}p_s p_{s'} p_{s''}\right), \left(\sum_{\substack{ss's''\\ s\leq s'\leq s''}} K_{ss's''}q_s q_{s'} q_{s''}\right)\right]$$
$$= (-i\hbar)\sum_{\substack{ss's''s'''\\ s\leq s'\\ s''\leq s'''}} \frac{1}{2}\Gamma^{ss'}_{s''s'''}(q_{s''}q_{s'''}p_s p_{s'} + p_s p_{s'} q_{s''} q_{s'''})$$
$$+ i\hbar^3\left(\Gamma - \frac{1}{2}\sum_s \Gamma^s_s\right). \quad (13)$$

3. **Application : calcul, au deuxième ordre, de l'énergie de vibration d'une molécule polyatomique.** — Si l'on utilise les notations de H. H. Nielsen [4], les corrections du deuxième ordre à l'énergie de vibration d'une molécule polyatomique sont données par les éléments diagonaux de l'opérateur

$$H_v^{(2)\prime} = H_v^{(2)} + \frac{i}{2}[S_v, H_v^{(1)}]$$

avec

$$H_v^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{p_\alpha^2}{I^{(e)}_{\alpha\alpha}} + hc \sum_{\substack{s\sigma, s'\sigma', s''\sigma'', s'''\sigma'''\\ s\leq s'\leq s''\leq s'''}} K_{ss's''s'''} q_{s\sigma} q_{s'\sigma'} q_{s''\sigma''} q_{s'''\sigma'''}, \quad (14)$$

$$H_v^{(1)} = hc \sum_{\substack{s\sigma, s'\sigma', s''\sigma''\\ s\leq s'\leq s''}} K_{ss's''} q_{s\sigma} q_{s'\sigma'} q_{s''\sigma''},$$

$$\begin{aligned}
S_v = &- \sum_{s\sigma} \frac{2hcK_{sss}}{\hbar^2\lambda_s^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{p^2_{s\sigma}}{3\hbar^2} + \frac{q_{s\sigma}p_{s\sigma}q_{s\sigma}}{2}\right)\\
&- \sum_{\substack{s\sigma, s'\sigma'\\ s\neq s'}} \frac{hcK_{sss'}}{\hbar^2\lambda_{s'}^{\frac{1}{2}}(4\lambda_s - \lambda_{s'})}\left[(2\lambda_s - \lambda_{s'})q^2_{s\sigma}p_{s'\sigma'} + (\lambda_s\lambda_{s'})^{\frac{1}{2}}(p_{s\sigma}q_{s\sigma} + q_{s\sigma}p_{s\sigma})q_{s'\sigma'} + \frac{2\lambda_s}{\hbar^2}p^2_{s\sigma}p_{s'\sigma'}\right]\\
&- \sum_{\substack{s\sigma, s'\sigma', s''\sigma''\\ s< s'< s''}} \frac{hcK_{ss's''}D_{ss's''}}{\hbar^2}\Big[\lambda_s^{\frac{1}{2}}(\lambda_s - \lambda_{s'} - \lambda_{s''})p_{s\sigma}q_{s'\sigma'}q_{s''\sigma''} + \lambda_{s'}^{\frac{1}{2}}(\lambda_{s'} - \lambda_{s''} - \lambda_s)p_{s'\sigma'}q_{s''\sigma''}q_{s\sigma}\\
&\qquad + \lambda_{s''}^{\frac{1}{2}}(\lambda_{s''} - \lambda_s - \lambda_{s'})p_{s''\sigma''}q_{s\sigma}q_{s'\sigma'} - \frac{2(\lambda_s\lambda_{s'}\lambda_{s''})^{\frac{1}{2}}}{\hbar^2}p_{s\sigma}p_{s'\sigma'}p_{s''\sigma''}\Big],
\end{aligned}$$

où

$$D_{ss's''} = \left[\left(\lambda_s^{\frac{1}{2}} + \lambda_{s'}^{\frac{1}{2}} + \lambda_{s''}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\lambda_s^{\frac{1}{2}} - \lambda_{s'}^{\frac{1}{2}} - \lambda_{s''}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\lambda_s^{\frac{1}{2}} - \lambda_{s'}^{\frac{1}{2}} + \lambda_{s''}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\lambda_s^{\frac{1}{2}} + \lambda_{s'}^{\frac{1}{2}} - \lambda_{s''}^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{-1}.$$

Or il est possible d'écrire la fonction S_v sous la forme condensée

$$S_v = -\frac{hc}{\hbar^2}\left[\sum_{\substack{s\sigma, s'\sigma', s''\sigma''\\ s\leq s'\leq s''}} A_{ss's''}p_{s\sigma}p_{s'\sigma'}p_{s''\sigma''} + \sum_{\substack{s\sigma\, s'\sigma'\, s''\sigma''\\ s'\leq s''}} B_{ss's''}q_{s'\sigma'}q_{s''\sigma''}p_{s\sigma}(1+\delta_{ss'}+\delta_{ss''}) - i\hbar\sum_{s\sigma}\Lambda_s q_{s\sigma}\right], \quad (15)$$

avec (²)

$$A_{ss's''} = -\frac{2}{\hbar^2} K_{ss's''} (\lambda_s \lambda_{s'} \lambda_{s''})^{\frac{1}{2}} D_{ss's''}, \qquad B_{\bar{s}s's''} = k_{ss's''} \lambda_s^{\frac{1}{2}} (\lambda_s - \lambda_{s'} - \lambda_{s''}) D_{ss's''}, \qquad \Lambda_s = \sum_{s'\sigma'} B_{\bar{s}'s's} (1 + 2\delta_{ss'}), \tag{16}$$

Il vient alors en utilisant les équations (10) et (8)

$$H_v^{(2)\prime} = H_v^{(2)} - \frac{h^2c^2}{2\hbar} \sum_{\substack{s\sigma,\, s'\sigma',\, s''\sigma'',\, s'''\sigma''' \\ s \leq s',\, s'' \leq s'''}} q_{s''\sigma''} q_{s'''\sigma'''} \left({}^A\Gamma^{ss'}_{s''s'''} p_{s\sigma} p_{s'\sigma'} + {}^B\Gamma^{ss'}_{s''s'''} q_{s\sigma} q_{s'\sigma'} \right) + \frac{ih^2c^2}{2} \sum_{s\sigma s'\sigma'} {}^A\Gamma^s_{s'} q_{s'\sigma'} p_{s\sigma} + \frac{\hbar h^2c^2}{2} {}^A\Gamma, \tag{17}$$

ce qui peut encore s'écrire conformément à l'équation (13)

$$H_v^{(2)\prime} = H_v^{(2)} - \frac{h^2c^2}{2h} \sum_{\substack{s\sigma,\, s'\sigma',\, s''\sigma'',\, s'''\sigma''' \\ s \leq s',\, s'' \leq s'''}} \left[\frac{{}^A\Gamma^{ss'}_{s''s'''}}{2} (p_{s\sigma} p_{s'\sigma'} q_{s''\sigma''} q_{s'''\sigma'''} + q_{s''\sigma''} q_{s'''\sigma'''} p_{s\sigma} p_{s'\sigma'}) + {}^B\Gamma^{ss'}_{s''s'''} q_{s\sigma} q_{s'\sigma'} q_{s''\sigma''} q_{s'''\sigma'''} \right] + \frac{\hbar h^2 c^2}{2} \left({}^A\Gamma - \frac{1}{2} \sum_s {}^A\Gamma^s_s \right) \tag{18}$$

Les coefficients ${}^A\Gamma^{\cdots}_{\cdots}$ étant donnés par les équations (12) et les coefficients ${}^B\Gamma^{\cdots}_{\cdots}$ par des équations analogues obtenues en remplaçant $A_{ss'l}$ par $B_{ss'\bar{l}}$.

Les corrections du deuxième ordre à l'énergie de vibration s'écrivent, à une constante près,

$$(v_1 v_2 \ldots | H_v^{(2)} | v_1 v_2 \ldots) + \left(v_1 v_2 \ldots \left| \frac{i}{2} [S_v, H_v^{(1)}] \right| v_1 v_2 \ldots \right) = hc \left\{ \sum_s x_{ss} \left(v_s + \frac{g_s}{2} \right)^2 + \sum_{\substack{ss' \\ s < s'}} x_{ss'} \left(v_s + \frac{g_s}{2} \right) \left(v_{s'} + \frac{g_{s'}}{2} \right) + \sum_{tt'} x_{l_t l_{t'}} l_t l_{t'} \right\}. \tag{19}$$

Calculons la contribution à x_{ss} et $x_{ss'}$ du deuxième terme du premier membre de l'équation (19). Compte tenu des équations (17) et (12), on obtient le tableau suivant :

Opérateur (³).	Élément diagonal (⁴).	Coefficient équation (17).	Contribution à x_{ss}.
q_s^4	$\frac{3}{2}\left(v_s + \frac{g_s}{2}\right)^2$	$-\frac{h^2c^2}{2\hbar} {}^B\Gamma^{ss}_{ss}$	$-\frac{3hc}{4\hbar}\left[\sum_{l \neq s} B_{ss\bar{l}} K_{ssl} + 9 B_{ss\bar{s}} K_{sss}\right]$
$p_s^2 q_s^2$	$\frac{h^2}{2}\left(v_s + \frac{g_s}{2}\right)^2$	$-\frac{h^2c^2}{2\hbar} {}^A\Gamma^{ss}_{ss}$	$-\frac{hc}{4\hbar}\left[\sum_{l \neq s} \hbar^2 A_{ssl} K_{ssl} + 9\hbar^2 A_{sss} K_{sss}\right]$
			Contribution à $x_{ss'}$.
$p_s^2 q_{s'}^2$	$h^2\left(v_s + \frac{g_s}{2}\right)\left(v_{s'} + \frac{g_{s'}}{2}\right)$	$-\frac{h^2c^2}{2h} {}^A\Gamma^{ss}_{s's'}$	$-\frac{hc}{2h}\left[\sum_{l \neq s,s'} \hbar^2 A_{ssl} K_{s's'l} + 3\hbar^2 (A_{sss'} K_{s's's'} + A_{sss} K_{s's's})\right]$
$p_{s'}^2 q_s^2$	$h^2\left(v_s + \frac{g_s}{2}\right)\left(v_{s'} + \frac{g_{s'}}{2}\right)$	$\frac{h^2c^2}{2h} {}^A\Gamma^{s's'}_{ss}$	$-\frac{hc}{2h}\left[\sum_{l \neq s,s'} \hbar^2 A_{s's'l} K_{ssl} + 3\hbar^2 (A_{s's's} K_{sss} + A_{s's's'} K_{sss'})\right]$
$q_s^2 q_{s'}^2$	$\left(v_s + \frac{g_s}{2}\right)\left(v_{s'} + \frac{g_{s'}}{2}\right)$	$-\frac{h^2c^2}{2\hbar} {}^B\Gamma^{ss}_{s's'}$	$-\frac{hc}{2h}\left[\sum_{l \neq s,s'} B_{ss\bar{l}} K_{ss'l} + 3 (B_{ss\bar{s}'} K_{s's's'} + B_{ss\bar{s}} K_{s's's})\right]$
$q_{s'}^2 q_s^2$	$\left(v_s + \frac{g_s}{2}\right)\left(v_{s'} + \frac{g_{s'}}{2}\right)$	$-\frac{h^2c^2}{2h} {}^B\Gamma^{s's'}_{ss}$	$-\frac{hc}{2h}\left[\sum_{l \neq s,s'} B_{s's'\bar{l}} K_{ssl} + 3 (B_{s's'\bar{s}} K_{sss} + B_{s's'\bar{s}'} K_{sss'})\right]$
$q_s q_{s'} q_s q_{s'}$ ...	$\left(v_s + \frac{g_s}{2}\right)\left(v_{s'} + \frac{g_{s'}}{2}\right)$	$-\frac{h^2c^2}{2\hbar} {}^B\Gamma^{ss'}_{ss'}$	$-\frac{hc}{2h}\left[\sum_{l \neq s,s'} B_{ss'\bar{l}} K_{ss'l} + 4 (B_{ss'\bar{s}} K_{sss'} + B_{ss'\bar{s}'} K_{ss's'})\right]$

(²) Dans la définition du coefficient $B_{\bar{s}s's''}$ l'ordre des indices est indifférent; l'indice surmonté d'un tiret correspond à l'opérateur p et les deux autres aux opérateurs q.

(³) On peut vérifier que l'opérateur $q_s q_{s'} p_s p_{s'}$ ayant pour élément diagonal $-\frac{\hbar^2}{4}$, sa contribution à $x_{ss'}$ est nulle.

(⁴) Pour $g_s > 1$, les deux premiers éléments contiennent également un terme dépendant de l_s, qui n'est pas écrit ici.

En remplaçant les A et les B par leur valeur donnée par les équations (16),

$$A_{ss's''} = -\frac{2}{h^2} K_{ss's''} (\lambda_s \lambda_{s'} \lambda_{s''})^{\frac{1}{2}} D_{ss's''},$$

$$B_{ss'\bar{s}''} = K_{ss's''} \lambda_{s''}^{\frac{1}{2}} (\lambda_{s''} - \lambda_s - \lambda_{s'}) D_{ss's''},$$

d'où

$$A_{sss'} = \frac{2}{h^2} K_{sss'} \frac{\lambda_s}{\lambda_{s'}^{\frac{1}{2}} (4\lambda_s - \lambda_{s'})} \quad \left| \begin{array}{l} B_{ss\bar{s}'} = \dfrac{K_{sss'}(2\lambda_s - \lambda_{s'})}{\lambda_{s'}^{\frac{1}{2}}(4\lambda_s - \lambda_{s'})}, \\[2ex] B_{ss'\bar{s}} = \dfrac{K_{sss'}\lambda_s^{\frac{1}{2}}}{4\lambda_s - \lambda_{s'}}; \end{array} \right.$$

$$A_{sss} = \frac{2}{3h^2} \frac{K_{sss}}{\lambda_s^{\frac{1}{2}}}, \qquad B_{ss\bar{s}} = \frac{K_{sss}}{3\lambda_s^{\frac{1}{2}}}$$

et en ajoutant la contribution du premier terme du premier membre de l'équation (19), on retrouve aisément pour les coefficients d'harmonicité x_{ss} et $x_{ss'}$ les valeurs obtenues par H. H. Nielsen [4] [5].

Conclusion. — La formulation mathématique développée dans les deux premiers paragraphes semble bien adaptée au calcul de l'énergie de vibration-rotation des molécules polyatomiques. Elle permet d'obtenir les corrections du second ordre à l'énergie de vibration beaucoup plus rapidement que la méthode analytique précédemment utilisée et doit permettre de simplifier le calcul des corrections d'ordre supérieur, calcul qui est actuellement en cours.

L'un d'entre nous (G. Amat) tient à exprimer ses remerciements à la Foreign Operations Administration (Gouvernement des États-Unis) pour l'attribution généreuse de la bourse qui lui a permis de participer aux recherches rapportées dans le présent article.

Appendice. — *Fonctions f_l.* — Conformément aux équations (1), l'expression $(\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_l})^2$ est une somme de $l!$ termes dont chacun est le produit de l symboles de Kronecker à deux indices. Sa valeur dépend des relations d'égalité existant entre les l indices i. Par exemple,

$$\underset{i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_l}{(\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_l})^2} = \delta_{i_1 i_1} \delta_{i_2 i_2} \ldots \delta_{i_l i_l} = 1,$$

$$\underset{i_1 = i_2 = \ldots = i_l}{(\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_l})^2} = l!$$

Par définition, nous poserons

$$\underset{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_l}{(\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_l})^2} = f_l.$$

[5] Avec cette différence que, compte tenu de l'écriture adoptée ici pour l'énergie de vibration [éq. (19)], notre $x_{ss'}$ correspond à $x_{s's} + x_{ss'}$ dans les notations de Nielsen.

Pour établir les formules (10′), il est particulièrement commode de représenter chaque produit de l symboles δ par un diagramme dans lequel une ligne joignant l'indice i de la première colonne à l'indice i' de la deuxième colonne correspond au symbole $\delta_{ii'}$ appartenant au produit considéré. La figure 1 est relative au cas $l = 3$.

$$(\alpha_{i_1 i_2 i_3})^2 = \delta_{i_1 i_1}\delta_{i_2 i_2}\delta_{i_3 i_3} + \delta_{i_1 i_2}\delta_{i_2 i_1}\delta_{i_3 i_3} + \delta_{i_1 i_1}\delta_{i_2 i_3}\delta_{i_3 i_2} + \delta_{i_1 i_3}\delta_{i_2 i_2}\delta_{i_3 i_1} + \delta_{i_1 i_2}\delta_{i_2 i_3}\delta_{i_3 i_1} + \delta_{i_1 i_3}\delta_{i_2 i_1}\delta_{i_3 i_2}$$

$$f_3 = 1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_2 i_3} + 3\,\delta_{i_1 i_2 i_3}$$

Fig. 1.

Par suite de la convention $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_l$, chaque fois que deux lignes se coupent dans un diagramme, les quatre indices i correspondants doivent être identiques pour que le terme considéré soit différent de zéro.

On peut faire les remarques suivantes au sujet des formules (10′) :

— Dans la formule donnant l'expression de f_l, la somme des coefficients est égale à l !

— Désignons par N_l le coefficient [6] de $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_l}$ (dernier terme de f_l)

$$N_1 = 1, \quad N_2 = 1, \quad N_3 = 3,$$
$$N_4 = 13, \quad N_5 = 71, \quad \ldots.$$

On peut démontrer la relation générale

$$l! = (l-1)!\,N_1 + (l-2)!\,N_2 + \ldots + 1!\,N_{l-1} + N_l,$$

c'est-à-dire

$$l! = \sum_{k=1}^{k=l} (l-k)!\,N_k.$$

Fonctions g_{m-l}. — Dans ce qui va suivre nous attribuons une signification à l'ordre des indices qui définissent un élément A à m indices :

$A_{s_1 \ldots s_m}$ n'étant différent de zéro que si

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_m;$$

$A_{\substack{s_1 \ldots s_{m-l} \\ i_1 \ldots i_l}}$ n'étant différent de zéro que si

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_{m-l},$$
$$i_1 < i_2 < \ldots < i_l.$$

Considérons maintenant m indices $s_1 s_2 \ldots s_{m-l}$,

[6] Si, pour une valeur donnée de l, on établit un tableau de diagrammes (comme cela a été fait pour $l = 3$ dans la figure 1), N_l est égal au nombre des diagrammes dans lesquels chaque segment coupe au moins un autre segment, le complexe formé n'étant pas décomposé en deux ou plusieurs complexes.

$i_1 i_2 \ldots i_l$ tels que

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_{m-l} \quad \text{et} \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_l$$

et considérons les différents éléments A que l'on peut définir à l'aide de ces m indices écrits sur une même ligne dans un ordre quelconque. Parmi ces éléments, seuls

$$\binom{m}{l} = \frac{m!}{(m-l)!\,l!}$$

sont différents de zéro (7), nous désignerons leur somme par $\mathcal{A}_{\substack{s_1 s_2 \ldots s_{m-l} \\ i_1 i_2 \ldots i_l}}$.

On a, par exemple,

— pour $m = 3$, $l = 1$:

$$\mathcal{A}_{\substack{s_1 s_2 \\ i_1}} = A_{s_1 s_2 i_1} + A_{s_1 i_1 s_2} + A_{i_1 s_1 s_2}; \tag{20}$$

— pour $m = 4$, $l = 2$:

$$\mathcal{A}_{\substack{s_1 s_2 \\ i_1 i_2}} = A_{s_1 s_2 i_1 i_2} + A_{s_1 i_1 s_2 i_2} + A_{s_1 i_1 i_2 s_2} + A_{i_1 s_1 i_2 s_2} + A_{i_1 s_1 s_2 i_2} + A_{i_1 i_2 s_1 s_2}. \tag{21}$$

On a le droit d'écrire

$$\sum_{\substack{s_1 \ldots s_{m-l}\, i_1 \ldots i_l \\ s_1 < s_2 < \ldots < s_{m-l} \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_l}} \mathcal{A}_{\substack{s_1 s_2 \ldots s_{m-l} \\ i_1 i_2 \ldots i_l}} = \sum_{\substack{s_1 \ldots s_{m-l}\, i_1 \ldots i_l \\ s_1 < s_2 < \ldots < s_{m-l} \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_l \\ s \neq i}} A_{\substack{s_1 s_2 \ldots s_{m-l} \\ i_1 i_2 \ldots i_l}}. \tag{22}$$

Si maintenant, dans toutes les conventions qui ont été faites depuis le début de ce paragraphe, nous remplaçons le signe $<$ par le signe $\leqq$, la relation (22) cesse d'être exacte, il faut écrire à la place

$$\sum_{\substack{s_1 \ldots s_{m-l}\, i_1 \ldots i_l \\ s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots \leqq s_{m-l} \\ i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_l}} \mathcal{A}_{\substack{s_1 s_2 \ldots s_{m-l} \\ i_1 i_2 \ldots i_l}} = \sum_{\substack{s_1 \ldots s_{m-l}\, i_1 \ldots i_l \\ s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots \leqq s_{m-l} \\ i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_l}} A_{\substack{s_1 s_2 \ldots s_{m-l} \\ i_1 i_2 \ldots i_l}}\, g_l^{m-l}. \tag{23}$$

Les équations (22) et (23) constituent la définition des fonctions g_l^{m-l}, à partir de laquelle il est possible d'obtenir les formules (10″). L'expression générale des fonctions g_l^{m-l} peut être écrite de la façon suivante :

$$g_l^{m-l} = 1 + \sum_{x=1}^{x=m-l} \sum_{y=1}^{y=l} \delta_{s_x i_y} + \sum_{x=1,\, x'=2}^{x=m-l-1,\, x'=m-l} \sum_{y=1,\, y'=2}^{y=l-1,\, y'=l} \delta_{s_x i_y} \delta_{s_{x'} i_{y'}} + \sum_{\substack{x=1,\, x'=2,\, x''=3 \\ x<x'<x''}}^{x=m-l-2,\, x'=m-l-1,\, x''=m-l} \sum_{\substack{y=1,\, y'=2,\, y''=3 \\ y<y'<y''}}^{y=l-2,\, y'=l-1,\, y''=l} \delta_{s_x i_y} \delta_{s_{x'} i_{y'}} \delta_{s_{x''} i_{y''}} + \ldots, \tag{24}$$

Le nombre de termes à écrire dans le deuxième membre de l'équation (24) étant égal au plus petit des deux nombres $l + 1$ et $m - l + 1$. (Autrement dit, le dernier terme sera un polynome homogène dont le degré par rapport aux δ est égal au plus petit des nombres l et $m - l$.) Si l'on développe les sommes figurant dans l'équation (24), ainsi que cela a été fait dans les formules (10″), le nombre total de termes obtenu pour g_l^{m-l} est égal au nombre de combinaisons

$$\binom{m}{l} = \frac{m!}{(m-l)!\,l!}.$$

(7) Ceux dans lesquels chaque s_k est écrit avant s_{k+1} et chaque i_k avant i_{k+1}.

Manuscrit reçu le 11 mai 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] KEMBLE E. C. — Fundamental Principles of Quantum Mechanics. Mc Graw Hill Book Company, New-York, 1937, p. 394.

[2] SHAFFER W. H., NIELSEN H. H. et THOMAS L. H. — *Phys. Rev.*, 1939, **56**, 895.

[3] HERMAN R. C. et SHAFFER W. H. — *J. Chem. Phys.*, 1948, **16**, 453.

[4] NIELSEN H. H. — *Rev. Mod. Physics*, 1951, **23**, 90.

DISPOSITIF DE COMPTAGE SOUSTRACTIF A TUBES DÉKATRONS

Par A. COCHE,
Laboratoire de Chimie nucléaire, Faculté des Sciences de Strasbourg.

Sommaire. — On décrit un dispositif de comptage permettant de soustraire les nombres d'impulsions données par deux compteurs de Geiger-Müller et utilisant des tubes décades à cathode froide (dékatrons) bidirectionnels. Les impulsions issues du dékatron indiquant les unités ou les dizaines actionnent un numérateur comptant ou décomptant, par l'intermédiaire de deux circuits d'aiguillage à bascules triode-hexode.

Bien que leur cadence de comptage soit limitée par suite du temps de désionisation, les tubes décades à cathode froide ont l'avantage de permettre la construction d'ensembles de comptage de faible encombrement, n'exigeant qu'un débit minime des sources d'alimentation. Les tubes bidirectionnels offrent, de plus, la possibilité de réaliser des dispositifs donnant la différence de deux nombres d'impulsions, par exemple des impulsions fournies par deux compteurs de Geiger-Müller, ce qui présente un intérêt dans différentes applications en Physique nucléaire. Nous avons construit une échelle de ce genre utilisant des tubes dékatrons bidirectionnels.

Un tube décade à cathode froide du type dékatron comprend [1] dans une ampoule remplie de gaz rare, 10 cathodes filiformes K_1, ... K_{10} disposées sur une circonférence et une anode centrale P. Lorsqu'une différence de potentiel suffisante est appliquée entre une des cathodes et l'anode, une décharge s'amorce, rendue visible par la gaine lumineuse qui entoure la cathode à la partie supérieure du tube. Entre les cathodes successives sont placées (*fig.* 1) des électrodes dites de transfert, $T_1T'_1$, $T_2T'_2$, ..., les électrodes T et T′ étant réunies entre elles et formant deux groupes G_1 et G_2, appelés guides. La décharge étant établie entre l'anode et une des cathodes, on peut provoquer l'amorçage de l'espace anode-cathode voisin (et l'extinction du premier), en appliquant aux guides, des impulsions rectangulaires négatives, de hauteur et durée convenables, telles que le front $a'b'$ de la deuxième (appliquée à G_2) coïncide avec le retour cd de la première (appliquée à G_1). Si chaque impulsion à compter produit deux impulsions (de ce type) appliquées aux guides, la décharge sera amorcée successivement dans les différents espaces anode-cathode, ce qui se traduit par la rotation de la gaine lumineuse de K_1 à K_2, ..., K_9, K_{10}, K_1, ... Dans les tubes bidirectionnels, le transfert de la décharge peut s'opérer également en sens inverse si l'impulsion appliquée à G_2 précède celle appliquée à G_1 et la rotation de la lueur se fera de K_{10} à K_9, ..., K_2, K_1, K_{10}, ...

Le schéma de principe du dispositif que nous avons réalisé, est donné sur la figure 2. Pour soustraire les impulsions provenant du compteur C_2 de celles données par C_1, il est nécessaire que chaque

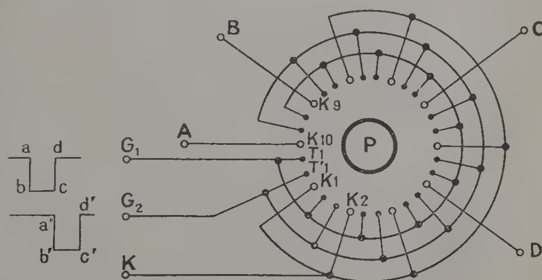


Fig. 1.

impulsion de C_1 et C_2 déclenche un générateur d'impulsions doubles et qu'ensuite le sens d'arrivée sur les guides des impulsions dues à C_2 soit inversé de manière que la rotation de la lueur se fasse en sens inverse de celui correspondant à l'arrivée d'une impulsion de C_1. Chacun des générateurs d'impulsions doubles comporte [1] deux lampes (L_1, L_2, L'_1 L'_2) dont les grilles sont polarisées en dessous de la tension de blocage. Une impulsion positive provenant du compteur (après amplification et mise en forme) appliquée à la grille de L_1 provoque l'apparition à la plaque de ce tube d'une impulsion négative rectangulaire qui est transmise par capacité

à la grille de L_2; la pointe positive qui apparaît par différentiation produit une impulsion négative à la plaque de L_2 dont le front coïncide avec le retour de celle donnée par L_1. Les impulsions (130 V, 80 μs) apparaissant aux plaques de L_1 et L'_2 sont appliquées au guide G_1 par l'intermédiaire des diodes D_1 et D'_2 (qui empêchent le déclenchement mutuel des deux circuits) [2], [3], celles prélevées aux plaques de L'_1 et L_2 sont appliquées au guide G_2 à travers les diodes D'_1 et D_2. La lueur tourne dans un sens ou dans l'autre suivant l'ordre d'arrivée des impulsions sur G_1 et G_2; les unités sont lues directement sur le dékatron et les dizaines sont enregistrées par un numérateur comptant et décomptant dont le sens de fonctionnement est commandé par les impulsions issues du dékatron, de la manière indiquée ci-dessous.

Le dékatron utilisé est un tube Etelco GC 10/4B sur lequel quatre cathodes ABCD sont accessibles (les autres reliées ensemble à l'intérieur du tube constituent la cathode commune K); on peut ainsi, sur ces cathodes, prélever des impulsions correspondant à l'arrivée de différents nombres d'impulsions sur les guides, suivant le sens de rotation et la cathode utilisée comme zéro. En prenant la cathode A comme zéro et en reliant la cathode commune K aux cathodes C et D, on peut recueillir aux bornes de leur résistance commune R_1, des impulsions correspondant à l'arrivée sur les guides des impulsions 1 à 8 dans un sens, 8 à 1 dans l'autre; aux bornes des résistances R_2 et R_3 reliées aux cathodes B et A, apparaissent des impulsions correspondant respectivement à l'arrivée des impulsions 9 et 10.

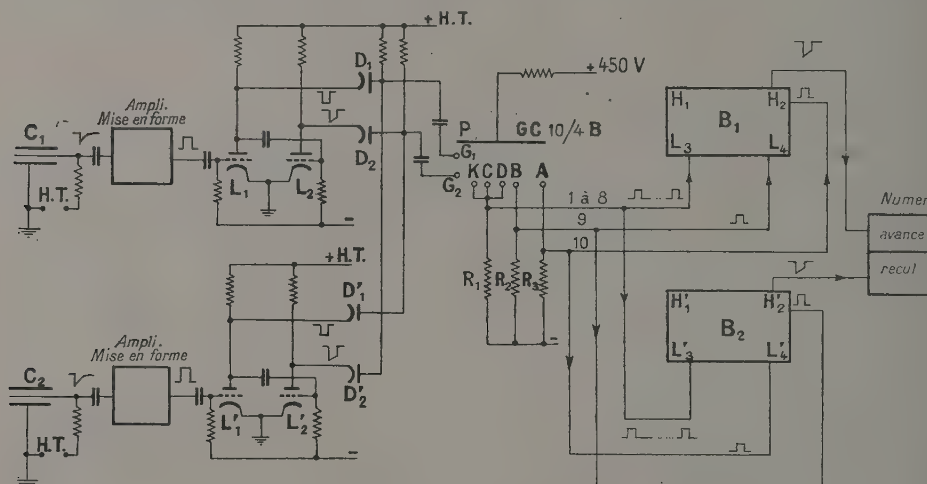


Fig. 2.

L'avance du numérateur (additions) est entraînée par l'impulsion 10 et le mouvement inverse (soustractions) par l'impulsion 9, par l'intermédiaire de deux circuits d'aiguillage constitués par les bascules B_1 et B_2, du type de celui décrit dans un autre but, par Y. Druet [4]. Chacun de ces circuits se compose d'une bascule utilisant les parties triodes (L_3L_4, $L'_3L'_4$) de deux tubes triode-hexode. La grille de l'hexode étant polarisée à la tension de blocage, un signal positif appliqué à cette électrode ne traversera l'hexode que si la partie triode correspondante est conductrice. Le basculement de B_1 est produit par les impulsions positives 1 à 8 (cathodes K, C et D) et 9 (cathode B) prises aux bornes de R_1 et R_2 et appliquées (après mise en forme) respectivement aux grilles de L_3 et L_4 par l'intermédiaire de diodes; le tube L_4 n'est conducteur que pendant l'impulsion 9 et éventuellement pendant l'impulsion 10 s'il a été déclenché au préalable par l'impulsion 9; l'impulsion 10 appliquée à la grille de l'hexode H_2 correspondant à L_4 ne traverse donc H_2 que lorsque L_4 est conductrice, c'est-à-dire quand l'impulsion 10 suit l'impulsion 9 (sens des additions). De la même manière, les grilles de L'_3 et L'_4 sont attaquées respectivement par les impulsions 1 à 8 et 10 et la grille de l'hexode H'_2 correspondant à L'_4, par l'impulsion 9; cette dernière n'est transmise à la plaque de H'_2 que lorsque L'_4 est conductrice, c'est-à-dire quand l'impulsion 10 précède 9 (sens des soustractions). Les enroulements du numérateur sont placés dans les circuits plaques de deux lampes aux grilles desquelles sont transmises respectivement les impulsions apparaissant aux plaques de H_2 et H'_2 de sorte que le numérateur avance d'une unité ou revient en arrière suivant que la lueur du dékatron passe de K_9 à K_{10} ou de K_{10} à K_9. En définitive, le numérateur indique le nombre de dizaines de la différence tandis que les unités sont lues sur le dékatron numéroté 0, 1, 2, ..., 9.

Pour des cadences de comptage plus élevées, le

dispositif peut être transformé en échelle de 100 en utilisant un deuxième dékatron. Le couplage des deux dékatrons doit être réalisé par l'intermédiaire d'un circuit capable de transmettre au deuxième le sens de l'opération (addition ou soustraction) du premier. On peut utiliser dans ce but deux circuits d'aiguillage à bascules triode hexode analogues à ceux mentionnés ci-dessus (et attaqués de la même manière) qui déclenchent deux générateurs d'impulsions doubles appliquées aux guides G'_1 et G'_2 du deuxième dékatron. Il est plus économique d'employer une échelle de 3 du type décrit par Churchill [2], constituée par des tubes à cathode froide; les électrodes de déclenchement (trigger) des trois tubes (par exemple STC. G_1/371 K) sont attaquées par les impulsions 1 à 8, 9, 10 du premier dékatron et les impulsions apparaissant aux anodes des tubes recevant les impulsions 9 et 10 sont appliquées aux guides G'_1 et G'_2. Le circuit de numération est commandé de la même manière que précédemment par les impulsions issues du deuxième dékatron. La cadence de comptage des circuits utilisant des tubes de ce genre est néanmoins limitée par l'intervalle de temps minimum qui doit exister entre deux impulsions et qui, pour le tube employé, est égal à 400 μs.

Manuscrit reçu le 21 mai 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bacon R. C. et Pollard J. R. — *Electron. Engng.*, 1950, **22**, 173-177.
[2] Churchill J. L. W. — *J. Brit. Inst. Radio Engrs*, 1952, **12**, 497-504.
[3] Cold-Cathode Tubes, Etelco, Handbook, 1954-1955.
[4] Druet Y. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **235**, 494-496; *Onde Électrique*, 1954, **34**, n° 323, 130-134.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 16, NOVEMBRE 1955, PAGE 863.

ÉTUDE DE LA PELLICULE D'AIR COMPRISE ENTRE UNE MEMBRANE CIRCULAIRE ET UNE ÉLECTRODE PLANE (I)

Par C. COLIN,
Laboratoire de Physique-Enseignement.

Sommaire. — On isole l'action de la pellicule d'air en plaçant la membrane entre deux électrodes symétriques; le système mécanique composé de la membrane et des deux électrodes fait partie d'un système électromécanique d'étude se réduisant à un quadripôle passif. On étudie la fonction de transfert en fonction de la fréquence.

La méthode consiste à substituer à la pulsation ω une pulsation complexe ω^* et se décompose en deux parties :

a. Détermination de la fonction de transfert $G(\omega^*)$: La structure de cette fonction traduit la symétrie de la membrane et la répartition des forces extérieures; $G(\omega^*)$ est, quelle que soit ω, une fonction holomorphe de ω^*.

b. Étude de la pulsation complexe ω^*.

Parties réelle et imaginaire de ω^* sont des fonctions paramétriques de ω, dépendant essentiellement d'impédances mécaniques traduisant l'existence de la pellicule d'air : élastance $\frac{1}{C_A \omega}$, inertance $L_A \omega$ et résistance R_V. Dans le cas courant où $\frac{R_V}{L_A \omega} \ll 1$, $\left(\frac{L_A}{C_A}\right)^{\frac{1}{2}} \ll R_V$ cette étude se ramène à la détermination d'un seul paramètre $P = \left(\frac{R_V^2 C_A}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ρ, densité superficielle de la membrane). P se détermine aisément par méthode impulsionnelle.

Il est alors possible de suivre les déformations des courbes représentatives de l'image de ω^* en fonction de la fréquence, lorsque le paramètre P varie continuement, de prévoir l'influence d'une modification du relief des électrodes.

A. **Description schématique du montage utilisé. Notations.** — I. Le système (*fig.* A.1) se compose d'une membrane métallique tendue, fixe le long d'une circonférence et placée entre deux électrodes planes, parallèles et symétriques par rapport au plan de la membrane. Entre l'élec-

trode (2) et le potentiel électrique de référence se trouve insérée une impédance Z. Nous supposons que du point de vue électrique les points A et B sont à un potentiel continu nul, le point D à un potentiel variable négligeable.

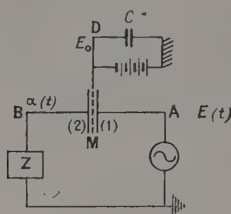


Fig. A.1.

II. Notations :

a, rayon de la membrane;

ρ, densité superficielle de la membrane;

T, tension mécanique par unité de surface;

r, distance d'un point M de la membrane à l'axe de symétrie;

$x = \frac{r}{a}$;

$z(r, \theta, t)$, déplacement vertical d'un point M de la membrane;

d, distance de la membrane au repos aux électrodes (1) et (2);

$y = \frac{z}{d}$;

E_0, potentiel électrique continu de la membrane;

$E(t)$, potentiel électrique de l'électrode (1);

$\alpha(t)$, potentiel électrique de l'électrode (2), dû à l'insertion de l'impédance Z;

Q_0, charge électrique de l'une des faces de la membrane lorsque les électrodes (1) et (2) sont au potentiel électrique de référence;

C_0, la capacité correspondante;

Q_2 et C_2, les charge et capacité respectives de la face de la membrane en regard de l'électrode (2). à l'instant t;

Nous poserons

$$Q_2 = Q_0 + q^{(2)}(t),$$

$q^{(2)}(t)$ étant une quantité d'électricité variable en fonction du temps et dont la variation est liée au mouvement de la membrane; à Q_0, correspond la densité superficielle d'électricité σ_0; à $q^{(2)}(t)$, $\sigma^{(2)}(r, \theta, t)$.

Nous considérerons $y(r, \theta, t)$, $\frac{E(t)}{E_0}$, $\frac{\alpha(t)}{E_0}$, $\frac{\sigma^{(2)}(r, \theta, t)}{\sigma_0}$ comme des infiniment petits du premier ordre.

B. **Équations traduisant l'équilibre mécanique et électrique.** — I. Équilibre mécanique. — 1° L'énergie électrostatique d'un élément de surface $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ de la membrane se met sous la forme

$$U^{(e)} = \frac{K_0}{8\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \left[\frac{(E_0 - E)^2}{d + z} + \frac{(E_0 - \alpha)^2}{d - z} \right],$$

on en déduit la force s'exerçant sur l'élément $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$,

$$F^{(e)} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial z} = \frac{K_0}{8\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \left[- \frac{(E_0 - E)^2}{(d + z)^2} + \frac{(E_0 - \alpha)^2}{(d - z)^2} \right],$$

Soit

$$F^{(e)} \sim \frac{K_0 E_0^2}{2\pi^2 d^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \left[\frac{E - \alpha}{2E_0} + y(r, \theta, t) \right]. \quad \text{(B.1)}$$

2° La réaction du milieu dans lequel vibre la membrane se traduit par l'existence d'une force $F^{(f)}$ que nous supposerons de la forme

$$F^{(f)} = -\rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\, k(p)\, z(r, \theta, t), \quad \text{(B.2)}$$

où p désigne le symbole $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

On peut alors écrire l'équation traduisant l'équilibre mécanique de la membrane

$$\rho \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \rho \left[k(p) - \frac{K_0 E_0^2}{2\pi\rho d^3} \right] z = T \Delta z + \frac{K_0 E_0 [E(t) - \alpha(t)]}{4\pi d^2}.$$

Soit en remplaçant r par ax et en exprimant Δz en coordonnées cylindriques,

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \left[k(p) - \frac{K_0 E_0^2}{2\pi\rho d^3} \right] z = \frac{\rho a^2}{T} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{K_0 E_0 (E - \alpha)}{4\pi\rho d^2} \right]. \quad \text{(B.3)}$$

II. Équilibre électrique. — 1° *Notations.* — Nous désignerons par ΔC_2 et ΔQ_2, les capacité et charge respectives de l'élément de surface $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ de la membrane vis-à-vis de l'électrode (2)

$$\Delta C_2 = \frac{K_0 a^2 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta}{4\pi d(1 - y)} = C_0 \frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta}{\pi(1 - y)},$$

$$\Delta Q_2 = a^2 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta [b^{(2)}(x, \theta, t) + b_0].$$

2° *L'équation traduisant l'équilibre électrique s'écrit :*

$$E_0 = \frac{\Delta Q_2}{\Delta C_2} + Z \frac{\mathrm{d}q^{(2)}(t)}{\mathrm{d}t}. \quad \text{(B.4)}$$

En tenant compte des relations

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta C_2} = \sigma_0 \frac{\pi a^2}{C_0} \left(1 + \frac{b^{(2)}}{b_0} \right) (1 - y) \sim E_0 \left(1 + \frac{b^{(2)}}{b_0} - y \right),$$

$$q^{(2)}(t) = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sigma^{(2)}(x, \theta, t)\, x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta.$$

L'équation (B.4) se met sous la forme équivalente

$$\frac{q^{(2)}(t)}{C_0} + Z \frac{\mathrm{d}q^{(2)}(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{E_0}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} y(x, \theta, t)\, x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta = 0. \quad \text{(B.5)}$$

L'expression $\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} y(x, \theta, t)\, x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta$ est la valeur moyenne du « déplacement vertical relatif » $\frac{z}{d}$ d'un point M de la membrane, prise sur le domaine de rayon a.

Nous poserons

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 y(x, 0, t)\, x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\theta. \qquad (\text{B}.6)$$

Du point de vue électrique la membrane est donc équivalente à une force électromotrice $E_0 h(t)$, d'impédance interne C_0, débitant sur une impédance Z aux bornes de laquelle on recueille la tension $\alpha(t)$ (*fig.* B.1).

Nous poserons

$$\alpha(t) = \Theta E_0 h(t). \qquad (\text{B}.7)$$

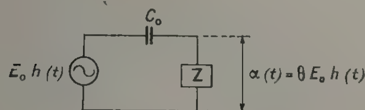


Fig. B.1.

C. **Cas du régime permanent.** — I. Notations. — Nous poserons

$$E(t) = E^* e^{j\omega t}; \qquad h(t) = h^* e^{j\omega t};$$
$$\alpha(t) = \alpha^* e^{j\omega t}; \qquad z(r, \theta, t) = z^* e^{j\omega t}.$$

II. Détermination approchée du coefficient $k(p)$. — Reprenons l'équation (B.2) sous la forme

$$P^{(f)} = -\rho k(p)\, z(r, \theta, t), \qquad (\text{C}.1)$$

dans le cas présent

$$p = j\omega \qquad \text{et} \qquad k(p) = k_1(\omega) + j\omega k_2(\omega).$$

Si l'on veut déterminer le coefficient $k(p)$ on peut supposer la membrane assujetie à un mouvement bien défini et étudier les variations de pression qui en résultent dans la pellicule d'air emprisonnée entre la membrane et les électrodes.

Nous poserons

$$P^{(f)} = -Z_A(j\omega)\frac{\mathrm{d}z(r, \theta, t)}{\mathrm{d}t} = j\omega z^* e^{j\omega t} \qquad (\text{C}.2)$$

Soit en comparant les relations (C.1) et (C.2)

$$\rho[k_1(\omega) + j\omega k_2(\omega)] = j\omega Z_A(j\omega). \qquad (\text{C}.3)$$

L'expression $Z_A(j\omega)$ correspond à une impédance mécanique qui en toute généralité se compose de :

1° une résistance, due à ce que le fluide est visqueux.

2° une inertance correspondant à l'inertie de la pellicule d'air en mouvement;

3° une élastance due à la compressibilité du gaz.

Considérons le schéma du dispositif mécanique utilisé (*fig.* C.1) et supposons :

1° le fluide parfait;

2° le mouvement de la pellicule d'air parallèle à l'axe OZ et assez rapide pour qu'il n'y ait pas d'échange de chaleur.

On montre alors par un calcul classique ([1]) que l'élasticité de l'air entraîne l'existence d'une pression

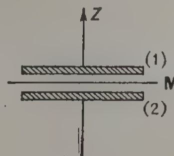


Fig. C.1.

liée au déplacement d'un point M de la membrane par la relation

$$P^*(r, \theta) = 2\frac{P_0\gamma}{d} z^*(r, \theta),$$

P_0 désigne la pression moyenne du fluide, correspondant à $r \geqq a$ et γ le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants.

Le coefficient 2 traduit la symétrie du montage.

Si l'on pose

$$C_A = \frac{d}{2\rho_0\gamma}, \qquad (\text{C}.4)$$

$$P^{(f)} = \frac{1}{C_A\omega}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \qquad (\text{C}.5)$$

Dans ce cas particulier, l'impédance Z_A se réduit à celle correspondant à la capacité C_A et on a le schéma simple équivalent (*fig.* C.2) suivant.

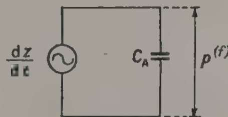


Fig. C.2.

Seulement nous avons supposé le fluide parfait et le mouvement de l'air parallèle à l'axe OZ, ce qui n'est pas le cas. Supposons en effet le mouvement de la membrane symétrique $\left(\frac{\partial z^*}{\partial \theta} = 0\right)$. Si la membrane se rapproche de l'une des électrodes, la pellicule d'air correspondante sera comprimée; une différence de pression s'établira entre la pression régnant sur l'axe OZ et celle correspondant à $r \geqq a$. Il se produira donc simultanément un mouvement latéral et un mouvement vertical. Le mouvement latéral sera conditionné par des forces de viscosité et d'inertie. On est alors conduit à adopter le schéma équivalent suivant (*fig.* C.3).

R_V est une résistance dépendant de la viscosité et des données géométriques, indépendante *a priori*

([1]) H. F. Olson, *Elements of acoustical Engineering.*

de la pression moyenne P_0. L_A est une inertance proportionnelle à la densité moyenne du gaz.

On peut se demander si le calcul de R_V et L_A, de même que celui de C_A est possible. Nous ne le pensons pas. Il existe certes des calculs classiques ([2]) concernant le mouvement latéral, mais ces calculs reposent sur des hypothèses arbitraires : d'une part, la membrane est assimilée à un piston plat équivalent, d'autre part, le régime d'écoulement du gaz est supposé implicitement laminaire et permanent,

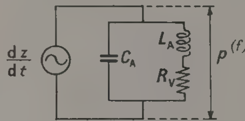


Fig. C.3.

donc régi par les lois de Poiseuille. Dans le cas présent, mouvement vibratoire périodique, on ne peut parler d'un régime « permanent » d'écoulement faisant abstraction de la durée d'établissement. Vraisemblablement le fluide s'accumule sur la membrane et sur les électrodes sur lesquelles il y a formation d'une pellicule visqueuse dont on ne sait pas calculer l'épaisseur.

Remarque. — Nous supposerons en première approximation que de même que C_A, L_A et R_V sont indépendants des coordonnées d'espace. Cette hypothèse peut sembler arbitraire, mais l'expérience ne la contredit pas.

L'impédance $Z(j\omega)$ se met sous la forme suivante :

$$Z_A(j\omega) = \frac{R_V}{(1 - L_A C_A \omega^2)^2 + R_V^2 C_A^2 \omega^2} + j\omega \frac{L_A(1 - L_A C_A \omega^2) - C_A R_V^2}{(1 - L_A C_A \omega^2)^2 + R_V^2 C_A^2 \omega^2}$$

on en déduit l'expression des coefficients $k_1(\omega)$ et $k_2(\omega)$,

$$k_2(\omega) = \frac{1}{\rho} \frac{R_V}{(1 - L_A C_A \omega^2)^2 + R_V^2 C_A^2 \omega^2}, \qquad (C.6)$$

$$k_1(\omega) = \frac{1}{\rho} \frac{C_A R_V^2 - L_A(1 - L_A C_A \omega^2)}{(1 - L_A C_A \omega^2)^2 + R_V^2 C_A^2 \omega^2} \omega^2. \qquad (C.7)$$

Si l'on pose

$$\lambda = \frac{K_0 E_0^2}{2\pi\rho d^3} - k_1(\omega), \qquad (C.8)$$

$$\omega^{*2} = \frac{T}{\rho} \frac{\xi^2}{a^2} = \omega^2 + \lambda - j\omega k_2(\omega). \qquad (C.9)$$

L'équation (B.3), traduisant l'équilibre mécanique se met sous la forme

$$\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial z^*}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z^*}{\partial \theta^2} + \xi^2 z^* = \frac{\rho a^2}{T} \frac{K_0 E_0 (E^* - \alpha^*)}{4\pi\rho d^3}, \qquad (C.10)$$

([2]) Irving B. Crandall, *Theory of vibratung systems and Sound*, p. 28 à 36.

avec la condition

$$z^*(a, 0) = 0. \qquad (C.11)$$

On montre aisément que la seule solution compatible avec la déformation statique ($\omega = 0$) est

$$z^* = \frac{K_0 E_0 (E^* - \alpha^*)}{4\pi\rho d^2} \frac{\mathcal{J}_0(\xi x) - \mathcal{J}_0(\xi)}{\omega^{*2} \mathcal{J}_0(\xi)}. \qquad (C.12)$$

Le calcul de α^* se déduit alors de la relation (B.7)

$$\alpha^* = \Theta E_0 \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{K_0 E_0}{4\pi\rho d^3} (E^* - \alpha^*) \frac{[\mathcal{J}_0(\xi x) - \mathcal{J}_0(\xi)]}{\omega^{*2} \mathcal{J}_0(\xi)}.$$

Soit

$$\alpha^* = \Theta \frac{K_0 E_0^2}{4\pi\rho d^3} (E^* - \alpha^*) \frac{\mathcal{J}_2(\xi)}{\omega^{*2} \mathcal{J}_0(\xi)}.$$

$\mathcal{J}_n(y)$ étant la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre n.

Posons

$$\Gamma = \Theta \frac{K_0 E_0^2}{4\pi\rho d^3} \qquad (\alpha^* < E^*), \qquad (C.13)$$

d'où

$$\alpha^* \sim \Gamma \frac{\mathcal{J}_2(\xi)}{\omega^{*2} \mathcal{J}_0(\xi)}. \qquad (C.14)$$

Le changement de variable (C.9) revient à introduire une pulsation complexe ω^*, dont les parties réelle et imaginaire sont des fonctions paramétriques de la pulsation ω. On vérifie aisément que du point de vue équations aux dimensions ω^* est homogène à T^{-1}, où T figure le temps. Son introduction est normale en effet : si l'on considère le cas présent, et si l'on ne tient pas compte de la réaction du milieu dans lequel vibre la membrane, une seule fonction de la fréquence suffit à définir la réponse α^* du système électromécanique, assimilé à un quadripôle passif. Dans le cas contraire, il faut connaître deux fonctions de la fréquence, puisqu'un déphasage s'établit entre le signal d'excitation E^* et la réponse α^*. Si l'on veut encore caractériser α^* par une seule fonction, il faut que cette fonction soit une fonction de variable complexe, soit de fréquence complexe.

Étant donné la proportionnalité de ω^* et de ξ, les fonctions $\frac{1}{\omega^{*2}} \frac{\mathcal{J}_2(\xi)}{\mathcal{J}_0(\xi)}$ et $\frac{1}{\omega^{*2}} \frac{\mathcal{J}_0(\xi x) - \mathcal{J}_0(\xi)}{\mathcal{J}_0(\xi)}$ peuvent se mettre sous la forme $G(\omega^*)$. Les pôles de cette fonction sont déterminés par la relation d'équations

$$\omega^{*2} = \omega_{m0}^2 \qquad (m \geq 1),$$

où

$$\omega_{m0}^2 = \frac{T}{\rho} \frac{\xi_{m0}^2}{a^2},$$

ξ_{m0} étant le $m^{\text{ième}}$ zéro de la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre zéro. Ces équations n'ont pas de racines réelles en ω. Donc pour $\omega \geq 0$, $G(\omega^*)$, est une fonction holomorphe de la pulsation complexe. Il y a biunivocité entre la réponse α^* et la pulsation ω^*.

Remarque. — L'intégration de l'équation différentielle (B.3) peut être remplacée dans le cas où la pression extérieure excitatrice ne dépend pas de θ par la sommation d'une série.

Il est possible en effet de représenter la fonction déplacement par une série double absolument et uniformément convergente soit

$$z(r,\theta,t)=\sum_{\substack{n\geq 0\\ m\geq 1}}[z_{mn}^{(1)}(t)\cos n\theta+z_{mn}^{(2)}(t)\sin n\theta]\,\mathcal{J}_n(k_{mn}r)$$

avec la relation

$$k_{mn}a=\xi_{mn},$$

à partir de cette expression il est possible de calculer un certain nombre d'expressions (³).

1° La force vive :

$$\mathcal{E}=\frac{1}{4}\rho\pi a^2\sum_{mn}[\dot z_{mn}^{(1)2}(t)+\dot z_{mn}^{(2)2}(t)]\,\mathcal{J}_n^2(\xi_{mn}).$$

2° L'énergie potentielle de déformation :

$$W=\frac{\pi T}{4}\sum\xi_{mn}^2[z_{mn}^{(1)2}(t)+z_{mn}^{(2)}(t)]\,\dot{\mathcal{J}}_n^2(\xi_{mn}).$$

3° Les fonctions de forces (méthode des déplacements virtuels) :

$$U=\sum_{mn}\left[\int A_{mn}\,\partial z_{mn}^{(1)}(t)+\int B_{mn}\,\partial z_{mn}^{(2)}(t)\right],$$

où

$$A_{mn}=a^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 P(ax,t,\theta)\cos n\theta\,\mathcal{J}_n(\xi_{mn}x)\,x\,dx\,d\theta,$$

$$B_{mn}=a^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 P(ax,t,\theta)\sin n\theta\,\mathcal{J}_n(\xi_{mn}x)\,x\,dx\,d\theta.$$

Nous aurons deux fonctions U, $U^{(e)}$ et $U^{(f)}$ suivant que

$$P=P^{(e)}=\frac{Fr}{r\,dr\,d\theta}\qquad\text{[formule (B.1)]}$$

$$P=P^{(f)}=\frac{F^{(f)}}{r\,dr\,d\theta}\qquad\text{[formule (B.2)]}.$$

Remarque. — Dans le cas $m=0$,

$$z_{m0}^{(1)}=z_{m0}^{(2)}.$$

En appliquant la méthode de Lagrange on obtient le système d'équations suivant :

1° $n=0$:

$$\ddot{\mathcal{J}}_{m0}(t)+k_2\dot{\mathcal{J}}_{m0}(t)+\left(\omega_{m0}^2-\frac{K_0E_0^2}{2\pi\rho d^3}+k_1\right)\mathcal{J}_{m0}(t)=\frac{K_0E_0[E(t)-\alpha(t)]}{2\pi\rho d^3\xi_{m0}\mathcal{J}_1(\xi_{m0})};$$

2° $n\neq 0$:

$$\ddot{\mathcal{J}}_{mn}^{(i)}(t)+k_2\dot{\mathcal{J}}_{mn}^{(i)}(t)+\left(\omega_{mn}^2-\frac{K_0E_0^2}{2\pi\rho d^3}+k_1\right)\mathcal{J}_{mn}^{(i)}(t)=0,$$

quel que soit $m\geq 1$ et où $i=1$ ou 2.

Les solutions $y^{(i)}(t)$ disparaissant en régime permanent, on peut se borner au cas où $m=0$.

Si l'on fait correspondre $\alpha_{m0}(t)$ et $h_{m0}(t)$ au partiel $z_{m0}(t)$, les relations (B.6) et (B.7) se décomposent en

$$h_{m0}(t)=2\frac{\mathcal{J}_1(\xi_{m0})}{\xi_{m0}}\mathcal{J}_{m0}(t),\qquad\text{(B.6')}$$

$$\alpha_{m0}(t)=\theta E_0h_{m0}(t),\qquad\text{(B.7')}$$

on est ainsi conduit aux expressions suivantes de α^* et z^*,

$$\alpha^*=\theta\frac{E_0^2}{\pi\rho d^3}\quad E^*\sum_m\frac{1}{\xi_{m0}^2(\omega_{m0}^2-\lambda-\omega^2+jk_2\omega)},$$

$$z^*=\frac{E_0}{2\pi\rho d^2}\quad E^*\sum\frac{1}{\xi_{m0}\mathcal{J}_1(\xi_{m0})(\omega_{m0}^2-\lambda-\omega^2+jk_2\omega)}.$$

Soit d'après (C.9)

$$\alpha^*=\frac{E_0^2}{\pi\rho d^3}\frac{\rho a^2}{T}E^*\sum_m\frac{1}{\xi_{m0}^2(\xi_{m0}^2-\xi^2)}=\frac{E_0^2}{\pi\rho d^3}\frac{\rho a^2}{T}(\Sigma)_1,$$

$$z^*=\frac{E_0}{2\pi\rho d^2}\frac{\rho a^2}{T}E^*\sum_m\frac{\mathcal{J}_0(\xi_{m0}x)}{\xi_{m0}(\xi_{m0}^2-\xi^2)\mathcal{J}_1(\xi_{m0})}=\frac{E_0}{2\pi\rho d^2}\frac{\rho a^2}{T}E^*(\Sigma)_2.$$

On vérifie alors que les séries $(\Sigma)_1$ et $(\Sigma)_2$ sont les développements en série de Mittag-Lœffler des fonctions méromorphes de ξ, $G_1(\xi)$ et $G_2(\xi)$ dont les expressions sont

$$G_1(\xi)=\frac{1}{2\xi^2}\left[\frac{\mathcal{J}_1(\xi)}{\xi\mathcal{J}_0(\xi)}-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4\xi^2}\frac{\mathcal{J}_2(\xi)}{\mathcal{J}_0(\xi)},$$

$$G_2(\xi)=\frac{\mathcal{J}_0(\xi x)-\mathcal{J}_0(\xi)}{2\xi^2\mathcal{J}_0(\xi)},$$

ce qui est conforme aux résultats déjà trouvés.

(³) Lord RAYLEIGH, *Theory of Sound*, vol. I (Membranes).

Manuscrit reçu le 5 mai 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

Lord RAYLEIGH. — Theory of Sound, vol. I.
WATSON. — Theory of Bessel Functions.
OLSON H. F. — Elements of acoustical Engineering.
CRANDALL I. B. — Theory of vibrating Systems and sound.
MATUDARA-HAYASAKA. — Analysis of forced vibrations of circular Membrane, circular plate, and hollow sphere. *Nippon Electrical communication engineering*, n° 11, juin 1938.

ÉTUDE DE LA PELLICULE D'AIR COMPRISE ENTRE UNE MEMBRANE CIRCULAIRE ET UNE ÉLECTRODE PLANE (II)

Par C. COLIN,
Laboratoire de Physique-Enseignement.

D. Étude théorique de la fonction de transfert $G(\omega^*) = \Gamma \frac{1}{\omega^{*2}} \frac{\mathcal{J}_2(\xi)}{\mathcal{J}_0(\xi)}$. — La fonction $G(\omega^*)$ se présente sous la forme d'un produit de deux fonctions sélectives dépendant de ω^*.

I. Étude de la fonction $\omega^{*2}(\omega)$. — Cette fonction se met sous la forme

$$\omega^{*2} = [(\omega^2 + \lambda) + k_2\,\omega^2]^{\frac{1}{2}}\, e^{2j\varphi},$$

avec

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\omega\, k_2(\omega)}{\omega^2 + \lambda},$$

Si l'on suppose

$$\frac{L_A\,\omega}{R_V} \ll 1, \qquad \sqrt{\frac{L_A}{C_A}} \ll R_V,$$

les expressions (C.7) et (C.8) se simplifient pour donner

$$\lambda \sim \frac{K_0 E_0^2}{2\pi\rho d^3} - \frac{R_V^2 C_A \omega^2}{\rho(1 + C_A^2 R_V^2 \omega^2)}, \tag{D.1}$$

$$k_2(\omega) \sim \frac{1}{\rho}\, \frac{R_V}{1 + C_A^2 R_V^2 \omega^2}, \tag{D.2}$$

nous poserons

$$\lambda^* = \omega^2 + \lambda, \tag{D.3}$$

$$k(\omega) = -\omega\, k_2(\omega), \tag{D.4}$$

$$\eta = \frac{K_0 E_0^2}{2\pi d^3}, \qquad \eta\, C_A = \varepsilon, \tag{D.5}$$

$$P^2 = \frac{R_V^2 C_A}{\rho}. \tag{D.6}$$

1° *Fonction* $\lambda^*(\omega)$:

$$\rho\lambda^* = \frac{\rho C_A^2 R_V^2 \omega^4 + [\rho + R_V^2 C_A(\eta C_A - 1)]\,\omega^2 + \eta}{1 + C_A^2 R_V^2 \omega^2},$$

on vérifie les résultats suivants :

a. Si

$$P > \frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon}}. \tag{D.7}$$

La fonction λ^* s'annule pour deux valeurs de ω soient ω^1 et ω^3, définies par les relations

$$\left.\begin{matrix}\omega_1^2 \\ \omega_3^2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{C_A\rho}\, \frac{P^2(1-\varepsilon) - 1}{P^2} \left[1 \mp \left(1 - \frac{4\varepsilon P^2}{[P^2(1-\varepsilon) - 1]^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Soient

$$\omega_1^2 = \frac{\frac{\eta}{\rho}}{P^2(1-\varepsilon) - 1}\left[1 + \frac{\varepsilon P^2}{[P^2(1-\varepsilon) - 1]^2} + \ldots\right], \tag{D.8}$$

$$\omega_3^2 = \frac{P^2(1-\varepsilon) - 1}{C_A\rho P^2}\left[1 - \frac{\varepsilon P^2}{[P^2(1-\varepsilon) - 1]^2} - \ldots\right]. \tag{D.9}$$

b. $$\frac{\partial\lambda^*}{\partial\omega} = 2\omega\left[1 - \frac{R_V^2 C_A}{\rho}\, \frac{1}{(1 + C_A^2 R_V^2 \omega^2)^2}\right],$$

expression s'annulant pour les valeurs de ω.

$$\left.\begin{matrix}\omega = 0, \\ \omega^2 = \omega_2^2 = \dfrac{1}{C_A\rho}\, \dfrac{P-1}{P^2}.\end{matrix}\right\} \tag{D.10}$$

La pulsation ω_2 correspond à un minimum de la fonction λ^*.

2° *Fonction* $K(\omega)$. — Cette fonction est constamment négative et passe par un minimum négatif correspondant à la pulsation

$$\omega_4^2 = \frac{1}{C_A^2 R_V^2} = \frac{1}{C_A\rho}\, \frac{1}{P^2}. \tag{D.11}$$

Si $P \geqq 2$:

$$\omega_2^2 \geqq \omega_4^2.$$

3° *Calcul des différentes valeurs prises par les fonctions* $\lambda^*(\omega)$ *et* $K(\omega)$ *pour les pulsations* $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_4$, $\omega = \omega_2$, $\omega = \omega_3$. — Nous supposerons que

$$\frac{\varepsilon P^2}{[P^2(1-\varepsilon) - 1]^2} \ll 1. \tag{D.12}$$

On vérifie facilement les résultats suivants :

a. $\omega^2 = \omega_1^2 \sim \dfrac{\frac{\eta}{\rho}}{P^2(1-\varepsilon) - 1}$

(α) $K(\omega_1) \sim -\dfrac{1}{C_A\rho}\, \dfrac{\sqrt{\varepsilon}\, P}{P^2 - 1}\, \sqrt{P^2(1-\varepsilon) - 1}$,

(β) $\lambda(\omega_1) = 0$;

b. $\omega^2 = \omega_4^2$:

(α) $K(\omega_4) = -\dfrac{1}{2C_A\rho}$,

(β) $\lambda^*(\omega_4) = -\dfrac{1}{2C_A\rho}\left[\dfrac{P^2(1-2\varepsilon) - 2}{P^2}\right]$;

c. $\omega^2 = \omega_2^2$:

(α) $K(\omega_2) = -\dfrac{1}{C_A\rho}\, \dfrac{\sqrt{P-1}}{P}$,

(β) $\lambda^*(\omega_2) = -\dfrac{1}{C_A\rho}\left[\left(\dfrac{P-1}{P}\right)^2 - \varepsilon\right]$;

d. $\omega^2 = \omega_3^2 \sim \dfrac{1}{C_A\rho}\, \dfrac{P^2(1-\varepsilon) - 1}{P^2}$:

(α) $K(\omega_3) \sim \dfrac{1}{C_A\rho}\, \dfrac{\sqrt{P^2(1-\varepsilon) - 1}}{P^2(1-\varepsilon)}$,

(β) $\lambda(\omega_3) = 0$;

dans le cas actuel d'électrodes uniformément planes.

Il est possible d'estimer l'ordre de grandeur du paramètre $\eta C_A = \varepsilon$:

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{K_0 E_0^2}{2\pi\rho d^3}}{\dfrac{1}{C_A \rho}}$$

est le rapport de deux carrés de pulsation.

Posons

$$E_0 = n_0 . 10^2 \text{ V} = \frac{n_0}{3} \text{ u. é. s. C. G. S.},$$

$$d = n_d . 10^{-3} \text{ cm},$$

$$P_0 = n_P \text{ cm de Hg} = n_p \times 13{,}6 \times 981 \text{ baryes},$$

$$\eta C_A \sim 0{,}47 \left(\frac{n_0}{n_d}\right)^2 \frac{1}{n_P}.$$

Exemple :

$$n_0 = 0{,}6, \qquad n_d = 4, \qquad \eta C_A = \varepsilon = \frac{1{,}057 . 10^{-2}}{n_P} \ll 1.$$

Groupons dans ce cas les résultats en un tableau récapitulatif (tableau D.13).

TABLEAU D.13.

ω^2	0	$\omega_1^2 \sim \frac{\eta}{\rho} \frac{1}{P^2-1}$	$\omega_4^2 = \frac{1}{C_A\rho} \frac{1}{P^2}$	$\omega_2^2 = \frac{1}{C_A\rho} \frac{P-1}{P^2}$	$\omega_3^2 \sim \frac{1}{C_A\rho} \frac{P^2-1}{P^2}$
$C_A\rho\lambda^*$	ε	0	$-\frac{P^2-2}{2P^2}$	$-\left(\frac{P-1}{P}\right)^2$	0
$C_A\rho K$	0	$-\sqrt{\frac{\varepsilon P^2}{P^2-1}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{P-1}{P^2}}$	$-\sqrt{\frac{P^2-1}{P^4}}$
$C_A\rho\,\lvert\omega^*\rvert^2$	ε	$\sqrt{\frac{\varepsilon P^2}{P^2-1}}$	$\sqrt{\frac{P^4-2P^2+2}{2P^4}}$	$\sqrt{\left(\frac{P-1}{P}\right)^4 + \frac{P-1}{P^2}}$	$\sqrt{\frac{P^2-1}{P^4}}$
$\operatorname{tg} 2\varphi$	0	$-\infty$	$\frac{P^2}{P^2-2}$	$\frac{P}{(P-1)^{\frac{3}{2}}}$	$-\infty$

Dans le cas où $P^2 \gg 1$ ce tableau se simplifie pour donner :

TABLEAU D.14.

ω^2	0	$\omega_1^2 \sim \frac{\eta}{\rho} \frac{1}{P^2}$	$\omega_4^2 = \frac{1}{C_A\rho} \frac{1}{P^2}$	$\omega_2^2 = \frac{1}{C_A\rho} \frac{1}{P}$	$\omega_3^2 \sim \frac{1}{C_A\rho}$
$C_A\rho\lambda^*$	ε	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0
$C_A\rho K$	0	$-\sqrt{\varepsilon}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{P}}$	$-\frac{1}{P}$
$C_A\rho\,\lvert\omega^*\rvert^2$	ε	$\sqrt{\varepsilon}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{P}$
$\operatorname{tg} 2\varphi$	$-\infty$	$-\infty$	1	$\frac{1}{\sqrt{P}}$	$-\infty$

Remarques. — I. Si $P > \dfrac{2}{1-2\varepsilon}$,

$$\lvert\omega^*(\omega_2)\rvert > \lvert\omega^*(\omega_4)\rvert. \qquad \text{(D.15)}$$

Il suffit en effet d'écrire

$$\left[\left(\frac{P-1}{P}\right)^2 - \varepsilon\right]^2 + \frac{P-1}{P^2} > \frac{1}{4}\left[\left(\frac{P^2(1-2\varepsilon)-2}{P^2}\right)^2 + 1\right],$$

Soit

$$\left(\frac{P-2}{P}\right)^2 \left[\frac{P(1-2\varepsilon)-2}{2P}\right] \quad 0.$$

Si $P = 2$,

$$\omega_2 = \omega_4.$$

II. Si $P > \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-2\varepsilon}}$,

$$\lvert\lambda^*(\omega_2)\rvert > \lvert K(\omega_4)\rvert \qquad \text{(D.16)}$$

4° *Courbes décrites par l'image du carré de la pulsation complexe lorsque* ω *croît de zéro à l'infini.* — *a.* Condition pour que la courbe présente un point double :

Si l'on désigne par ω_5 et ω_6 les pulsations correspondant au point double, on doit avoir les relations suivantes :

$$\lambda^*(\omega_5) = \lambda^*(\omega_6); \qquad K(\omega_5) = K(\omega_6);$$

on obtient alors les résultats suivants :

$P < 2$: pas de point double;
$P = 2$: un point de rebroussement;
$P > 2$: un point double correspondant à

$$\left.\begin{matrix}\omega_5^2\\ \omega_6^2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2C_A\rho}\,\frac{P^2 - 2 \mp \sqrt{P^2-4}}{P^2}. \qquad \text{(D.17)}$$

b. Condition pour que $|K(\omega_3)| < |K(\omega_1)|$, ce qui revient à écrire

$$(\omega_3 - \omega_1)(1 - R_V^2 C_A \omega_3) < 0,$$

on trouve ainsi la condition :

$$P > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \qquad \text{(D.18)}$$

c. En combinant ces divers résultats on peut suivre la déformation continue des courbes lorsque le paramètre P varie : on distingue cinq cas importants :

(α) $P < \sqrt{2}$ (*fig.* D.1),
(β) $\sqrt{2} < P < 2$ (*fig.* D.2),
(γ) $P = 2$ (*fig.* D.3),
(δ) $2 < P < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (*fig.* D.4),
(ε) $P > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (*fig.* D.5).

Remarque. — Il est possible de choisir comme unité $\frac{1}{C_A\rho}$.

II. Étude de la fonction $G(\omega^*)$ dans deux cas limites. — 1° *Cas des basses fréquences* : $\operatorname{tg}\varphi \ll 1$,

$$\alpha^* = \Gamma a^2 \frac{\rho}{T}\,\frac{1}{\xi^2}\,\frac{\mathcal{J}_2(\xi)}{\mathcal{J}_0(\xi)}.$$

Posons

$$\frac{1}{\xi^2}\,\frac{\mathcal{J}_2(\xi)}{\mathcal{J}_0(\xi)} = U\,e^{j\Phi}, \qquad \text{(D.19)}$$

$$\xi = t\tau \left\{\begin{matrix}\tau = e^{j\varphi},\\ t = |\xi|,\end{matrix}\right. \qquad \text{(D.20)}$$

on sait que

$$\mathcal{J}_n(t\tau) = \tau^n\left[\frac{1}{r!}\left(\frac{t(1-\tau^2)}{2}\right)^r \mathcal{J}_{n+r}(t)\right]. \qquad \text{(D.21)}$$

Appliquons cette formule de multiplication des arguments à $\mathcal{J}_2(\xi)$ et $\mathcal{J}_0(\xi)$,

$$\frac{1-\tau^2}{2} = -\frac{1}{2}j\sin 2\varphi(1 + \operatorname{tg}\varphi) \sim -\frac{1}{2}j\sin 2\varphi.$$

$$\frac{t(1-\tau^2)}{2} \sim j\alpha.$$

en posant

$$\alpha = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\rho}{T}\,\frac{k_2\omega}{t^{\frac{1}{2}}}}. \qquad \text{(D.22)}$$

En négligeant les termes en $\alpha^n (n > 4)$ et en écrivant $\mathcal{J}_n(t)$, $\mathcal{J}_n$, on obtient les résultats suivants :

$$U^2 \sim \frac{1}{t^4}\,\frac{\mathcal{J}_2^2 + \alpha^2(\mathcal{J}_3^2 - \mathcal{J}_2\mathcal{J}_4)}{\mathcal{J}_0^2 + \alpha^2(\mathcal{J}_1^2 - \mathcal{J}_0\mathcal{J}_2)}, \qquad \text{(D.23)}$$

$$\operatorname{tg}\Phi \sim \alpha\,\frac{\left\{\begin{matrix}\mathcal{J}_0\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\\ + \frac{\alpha^2}{3!}(3\mathcal{J}_1\mathcal{J}_4 - 2\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_0\mathcal{J}_5)\end{matrix}\right\}}{\mathcal{J}_2\mathcal{J}_0 + \frac{\alpha^2}{2}[2\mathcal{J}_1\mathcal{J}_3 - (\mathcal{J}_2^2 + \mathcal{J}_0\mathcal{J}_4)]}. \qquad \text{(D.24)}$$

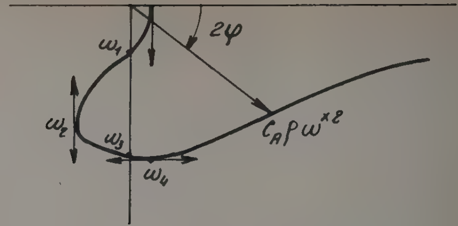


Fig. D.1. — $P < \sqrt{2}$.

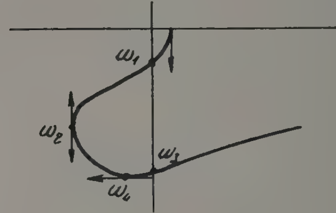


Fig. D.2. — $\sqrt{2} < P < 2$.

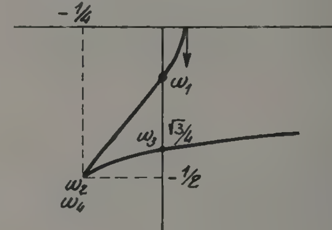


Fig. D.3. — $P = 2$.

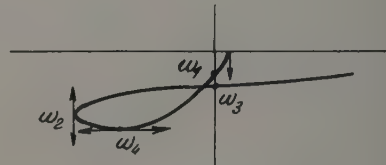


Fig. D.4. — $2 < P < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

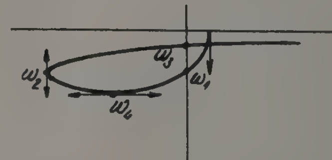


Fig. D.5. — $P > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Ces expressions se simplifient si $t = \xi_{mn}$, cas dans lequel

$$\omega^2 \sim \omega_{mn}^2 - \lambda(\omega),$$

$$\alpha_{mn} \sim \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\rho}{T}}\,k_2\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\omega_{mn}^2}}.$$

L'étude des cas $t = \xi_{m0}$, $t = \xi_{m1}$, $t = \xi_{m2}$ permettent de dresser le tableau D.25.

Remarque. — $\xi_{10}^2 \sim 5{,}78$, donc :

Si $m = 1$:

$$|\alpha_{10}^*| \sim \Gamma\frac{E^*}{\omega_{10}^2}\frac{2}{\alpha_{10}\xi_{10}}; \qquad \operatorname{tg}\Phi_{10} < 0.$$

Si $m > 1$:

$$|\alpha_{m0}^*| \sim \Gamma\frac{E^*}{\omega_{m0}^2}\sqrt{1 + \frac{4}{\alpha_{m0}^2\xi_{m0}^2}}; \qquad \operatorname{tg}\Phi_{m0} > 0.$$

TABLEAU D.25.

ω	$\sqrt{\omega_{m0}^2 - \lambda}$	$\sqrt{\omega_{m1}^2 - \lambda}$	$\sqrt{\omega_{m2}^2 - \lambda}$
$\lvert\alpha_{mn}^*\rvert$	$\Gamma\frac{E^*}{\omega_{m0}^2}\sqrt{1 + \frac{4}{\alpha_{m0}^2\xi_{m0}^2} - \frac{32}{\xi_{m0}^4}}$	$\Gamma\frac{E^*}{\omega_{m1}^2}$	$\Gamma\frac{E^*}{\omega_{m2}^2}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\alpha_{m2}^2\xi_{m2}^2}}}$
$\operatorname{tg}\Phi_{mn}$	$\frac{2}{\alpha_{m0}}\frac{\xi_{m0}}{\xi_{m0}^2 - 6}$	$\frac{4\alpha_{m1}}{\xi_{m1}}$	$\frac{2}{\alpha_{m2}}\frac{\xi_{m2}}{\xi_{m2}^2 - 6}$

2° *Cas ou* $|\xi|$ *est grand* :

$$\frac{\mathcal{J}_2(\xi)}{\mathcal{J}_0(\xi)} \sim -1$$

si bien que

$$|\alpha^*| \sim \Gamma\frac{1}{|\omega^*|^2}, \qquad (D.26)$$

$$\Phi \sim 2\varphi - \pi. \qquad (D.27)$$

E. **Détermination du paramètre** P. — I. Si la résistance R_V est indépendante de la pression moyenne P_0 et si C_A est inversement proportionnelle à P_0, nous aurons la relation

$$P^2 = \text{const.} \times P_0^{-1}, \qquad (E.1)$$

P^2 sera donc d'autant plus grand que P_0 sera faible si P_0 est assez faible on se trouvera dans le cas où les courbes représentatives de ω^{*2} présentent un point double et l'on devra constater expérimentalement la présence d'un maximum de la tension $|\alpha^*|$, correspondant à la pulsation $\omega \sim \omega_3$, d'autant plus accentué que P_0 sera faible .De plus en se référant au tableau D.14 on constate que l'on devra avoir les relations suivantes :

$$\omega_3^2 \sim \frac{1}{C_A\rho} = \text{const.} \times P_0^{-1}, \qquad (E.2)$$

$$|\alpha^*| \sim \Gamma C_A \rho P = \text{const.} \times P_0^{-3/2}. \qquad (E.3)$$

C'est bien ce que l'on constate expérimentalement (*fig.* E.1, E.2 et E.3). Les conditions d'expérience dans les trois cas sont :

$$d = 4.10^{-3}\ \text{cm}; \quad E_0 = 60\ \text{V}; \quad E^* = 5\ \text{V eff.}$$

La courbe (E.1) a été tracée pour une pression correspondant à $P_0 \sim 1$ cm de Hg. La fréquence correspondant au maximum est $f_0 = 9\,372$ p/s.

En conclusion on peut admettre la relation (E.1) Nous calculerons donc la valeur du paramètre P à une pression P_0 réduite et nous extrapolerons pour déterminer sa valeur à pression normale.

II. 1° Etant donnée l'allure de la courbe représentative des variations de la tension $|\alpha^*|$ en fonction de la fréquence (*fig.* E.3). Il est évident que si l'on soumet la membrane à une impulsion isolée,

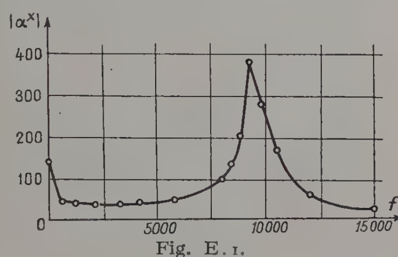


Fig. E.1.

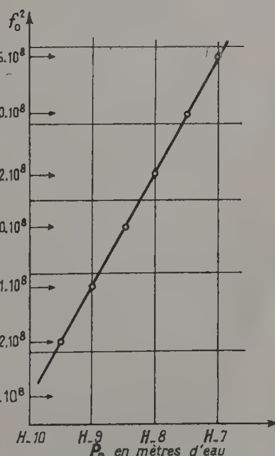


Fig. E.2.

la tension $\alpha(t)$ sera une tension sinusoïdale amortie, la pseudo-période T demeurant voisine de T_3 correspondant à ω_3. La tension $\alpha(t)$ sera donc de la forme

$$\alpha(t) \sim K\,e^{-kt}\sin(\omega t + \varphi). \qquad (E.4)$$

Nous nous proposons de déterminer le coefficient k

par deux procédés différents :

a. Détermination expérimentale. — On substitue à la tension $E(t) = E^* e^{j\omega t}$ une tension $E(t)$ composée d'impulsions rectangulaires de durée τ et dont la fréquence de récurrence est f. Si

$$\tau \ll T_r, \qquad T_3 \ll T_r.$$

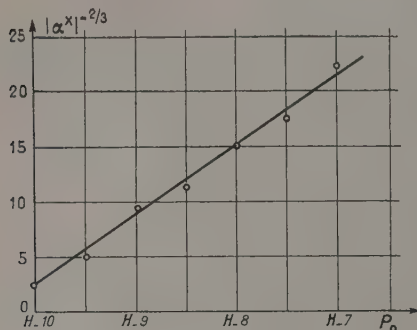


Fig. E.3.

Nous sommes ramenés au cas d'une impulsion isolée, nous avons choisi

$$\frac{\tau}{T_r} = \frac{1}{15}; \qquad f_r \sim 940 \text{ p/s}.$$

Pour mettre en évidence la tension $\alpha(t)$, on utilise le montage représenté par la figure E.4.

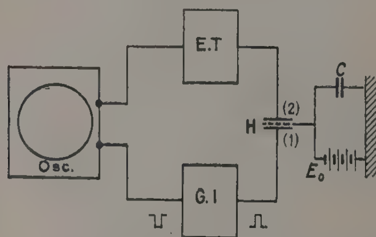


Fig. E.4.

E. T. désigne un étage transformateur d'impédance permettant de rendre le coefficient Θ [formule (B.7)] indépendant de la fréquence;

O.S.C. désigne un oscillographe cathodique à deux voies d'entrée;

G.I. désigne un générateur d'impulsions rectangulaires à sorties symétriques.

La fréquence de balayage de l'oscillographe est f_r ou un sous multiple de f_r. On obtient ainsi les oscillogrammes correspondant aux figures E.5 et E.6.

Un calcul classique effectué à partir de la figure E.6 permet de déterminer k. On trouve ainsi

$$k = 2150 \text{ C. G. S.} \tag{E.5}$$

b. Calcul théorique. — Il est également possible de calculer théoriquement le coefficient k, considéré comme une fonction de R_V et de C_A; il suffit de connaître la réponse $\alpha(t)$ à la fonction de Dirac $\partial(t)$; on utilise la méthode opérationnelle de Laplace. Soient : $A(p) = \mathcal{L}[\alpha(t)]$, la transformée de $\alpha(t)$, 1 celle de $\partial(t)$; ces transformées sont liées par la relation

$$A(p) = Z^*(p) \times 1,$$

$Z^*(p)$ étant la fonction opérationnelle de transfert; la détermination de $Z^*(p)$ est évidente. Dans le cas

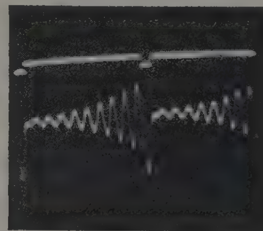


Fig. E.5.

où $E(t) = E^* e^{j\omega t}$ on a en effet la relation

$$\alpha^* = Z(j\omega) E^*,$$

on en déduit

$$Z^*(p) = Z(p)$$

et par suite

$$\alpha(t) = \mathcal{L}^{-1}[Z^*(p)].$$

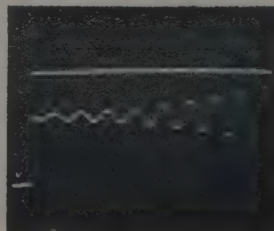


Fig. E.6.

Si l'on désigne par $p_{m0}^{(i)}$ les racines de l'équation

$$\xi(p) = \xi_{m0}. \tag{E.6}$$

L'expression de $\alpha(t)$ se met sous la forme

$$\alpha(t) = \Gamma \sum_{m \geq 1} \frac{\Sigma_i e^{p_{m0}^{(i)} t}}{\omega_{m0}^2} \frac{\mathcal{J}_2(\xi_{m0})}{\mathcal{J}_0(\xi_{m0})},$$

soit

$$\alpha(t) = -\frac{\Gamma}{2} \sum_{m \geq 1} \frac{\Sigma_i e^{p_{m0}^{(i)} t}}{\xi_{m0}\omega_{m0}^2}.$$

Le problème consiste donc à résoudre l'équation (E.6), cette équation peut se mettre sous la

forme

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\rho R_V^2 C_A^2 p^4 + [R_V^2 C_A(1-\eta C_A) - \rho] p^2 \\ \qquad - R_V p + \eta\end{array}\right\}}{\rho(1 - R_V^2 C_A^2 p^2)} = \omega_{m0}^2. \quad (E.7)$$

Soit après division par le facteur commun $1 - R_V C_A p$ et réduction des deux membres de l'équation au même dénominateur :

$$C_A R_V p^3 + p^2 + \frac{R_V}{\rho}(1 + C_A \rho \omega_{m0}^2) + \omega_{m0}^2 - \frac{\eta}{\rho} = 0. \quad (E.8)$$

Cette équation admet une racine réelle négative et deux racines complexes conjuguées. La résolution rigoureuse de cette équation est possible, mais on peut plus simplement obtenir une solution approximative satisfaisante. Posons

$$X = p\sqrt{C_A \rho}, \quad (E.9)$$
$$\delta = C_A \rho \omega_{m0}^2. \quad (E.10)$$

L'équation (E.8) devient

$$PX^3 + X^2 + P(1+\delta)X + \delta - \varepsilon = 0, \quad (E.8\ bis)$$

on vérifie que la solution réelle est de la forme

$$X^{(3)} = -\frac{1}{P}\left[\frac{\delta - \varepsilon}{1+\delta} + O\left(\frac{1}{P^2}\right)\right]. \quad (E.11)$$

Soit comme $P^2 \gg 1$:

$$X^{(3)} \sim -\frac{1}{P}\left[\frac{\delta - \varepsilon}{1+\delta}\right].$$

Il en résulte que les solutions complexes satisfont l'équation

$$PX^2 + \frac{1+\varepsilon}{1+\delta}X + P(1+\delta) - \frac{1}{P}\frac{(\delta-\varepsilon)(1+\varepsilon)}{(1+\delta)^2} = 0. \quad (E.12)$$

Soit en négligeant $\frac{1}{P}\frac{(\delta-\varepsilon)(1+\varepsilon)}{(1+\delta)^2}$ devant $P(1+\delta)$,

$$PX^2 + \frac{1+\varepsilon}{1+\delta}X + P(1+\delta) = 0,$$

dont les racines sont

$$\left.\begin{array}{l}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{array}\right\} = -\frac{1}{2P}\frac{1+\varepsilon}{1+\delta} \pm j\sqrt{1+\delta - \frac{1}{4P^2}\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\delta}\right)^2}$$
$$\sim -\frac{1}{2P}\frac{1+\varepsilon}{1+\delta} \pm j\sqrt{1+\delta}.$$

Soient en tenant compte de (E.9) et (E.10) :

$$\left.\begin{array}{l}p_{m0}^{(1)}\\p_{m0}^{(2)}\end{array}\right\} = -\frac{1}{2C_A R_V}\frac{1+\varepsilon}{1+C_A\rho\omega_{m0}^2} \pm \frac{1}{\sqrt{C_A\rho}}\sqrt{1+C_A\rho\omega_{m0}^2}, \quad (E.13)$$

$$p_{m0}^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{C_A\rho}}\frac{C_A\rho\omega_{m0}^2 - \varepsilon}{C_A\rho\omega_{m0}^2 + 1}.$$

La rapidité de la convergence de la série (E.7) permet pratiquement de se borner au premier terme. Dans ce cas $C_A\rho\omega_{10}^2 \ll 1$ et

$$k(R_V C_A) \sim -\frac{1}{2C_A R_V}. \quad (E.14)$$

III. Calcul du paramètre P^2 :

$$P^2 = \frac{R_V^2 C_A}{\rho} = \frac{R_V^2 C_A^2}{C_A \rho}.$$

La valeur de $R_V C_A$ se déduit du rapprochement des formules (E.5) et (E.14); celle de l'expression $\frac{1}{C_A\rho}$ peut se déterminer de deux manières différentes :

a. Par mesure directe (*fig.* E.3) :

$$\frac{1}{C_A\rho} = 4\pi^2(9\,370)^2;$$

d'où

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{4}\left(\frac{9\,370}{2\,150}\right)^2 = 189.$$

b. Théoriquement :

$$C_A = \frac{d}{2P_0\gamma},$$
$$P_0 \sim 1 \times 13,6 \times 981 \text{ baryes},$$
$$d \sim 4.10^{-3} \text{ cm},$$
$$\gamma = 1,4,$$
$$\rho = 2,85.10^{-3} \text{ g/cm}^2,$$

on trouve ainsi

$$P^2 = 176.$$

Connaissant la valeur du paramètre P^2 correspondant à la valeur $P_0 = 1$ cm de mercure; on déduit sa valeur à la pression normale, soit

$$(P^2)_{76} = \frac{189}{76} = 2,48,$$
$$(P)_{76} \sim \sqrt{2,48} = 1,57 < 2.$$

Manuscrit reçu le 5 mai 1955.

EXPOSÉS ET MISES AU POINT BIBLIOGRAPHIQUES

UTILISATION D'UN BÉTATRON EN PHYSIQUE NUCLÉAIRE

Par Georges BOULÈGUE.

Sommaire. — Le bétatron donne un spectre X continu de l'énergie zéro à l'énergie E des électrons frappant l'anticathode. Pour interpréter les résultats obtenus en irradiant un corps avec le faisceau pour une série de valeurs de E, il faut déterminer cette énergie E, connaître la forme des spectres et étalonner l'appareil en valeur absolue. En outre le calcul des sections efficaces en fonction de l'énergie des photons d'après les résultats globaux obtenus expérimentalement (courbe d'excitation) exige la résolution d'une équation intégrale.

Les premières réactions photonucléaires observées [1] étaient produites par le rayonnement γ qui est émis, soit par certains corps radioactifs, soit au cours de réactions nucléaires. En particulier le bombardement du lithium par des protons de plus de 350 keV fournit des photons dont le spectre comporte une raie à 17,6 MeV et une autre, moins intense, à 14,8 MeV :



$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{8}_{4}\mathrm{Be} + \gamma.$$

Les valeurs assez élevées de ces énergies ont permis l'étude de réactions photonucléaires dont le seuil peut se situer jusqu'aux environs de 15 MeV. Toutefois, on n'obtient par ce procédé que quelques points et souvent un seul, pratiquement, de la courbe de section efficace. Pour faire un travail plus complet, il fallait disposer de sources de photons d'énergie variable, pouvant atteindre plusieurs dizaines de mégaélectron-volts. Les bétatrons, tels qu'ils sont construits actuellement, répondent à ces conditions, mais présentent des sujétions particulières dans leur emploi. C'est l'objet principal de cet exposé.

Les bétatrons, comme, d'ailleurs, les synchrotrons et les accélérateurs linéaires, accélèrent des électrons jusqu'à une énergie cinétique E et les projettent sur une cible ou anticathode dans laquelle prend naissance, de ce fait, un faisceau de rayons X, le rayonnement de freinage (bremsstrahlung). Il y a lieu de remarquer que ce rayonnement n'est pas du tout monoénergétique, mais au contraire distribué selon un spectre continu entre zéro et E.

D'autre part tous ces accélérateurs ont une émission *pulsée*. Les impulsions ont des durées variables d'un type d'appareil à un autre (1 μs environ pour des accélérateurs linéaires, 1 μs à plus de 100 μs pour des bétatrons) et la fréquence de répétition est fixée par construction (50 ou 180 par seconde dans les bétatrons, 500 ou 1000 dans certains accélérateurs linéaires). Ce régime pulsé présente des inconvénients dont il sera parlé plus loin mais on ne peut s'affranchir de cette nécessité.

Dans la plupart des bétatrons, l'anticathode est située à l'intérieur du tube d'accélération : on ne peut donc faire aucune mesure sur le faisceau d'électrons lui-même. Certains modèles, cependant, permettent la sortie des électrons et l'utilisation d'une anticathode extérieure.

Généralités. — Pour trouver la section efficace des réactions nucléaires en fonction de l'énergie des photons, il serait certainement très souhaitable

de pouvoir décomposer le spectre en tranches étroites, approximativement monoénergétiques, ainsi qu'il est pratiqué avec la lumière ou les rayons X de faible énergie, grâce aux phénomènes de réfraction et de diffraction. Malheureusement pour des photons de quelques mégaélectron-volts à quelques dizaines de mégaélectrons-volts et plus, cette décomposition n'est pas, physiquement, concevable pour l'instant. Certains expérimentateurs ont, cependant, cherché à mesurer directement l'action des photons d'une tranche d'énergie déterminée à l'intérieur de l'ensemble du spectre.

1° Chaque réaction photonucléaire ne présente une section efficace notable que dans un intervalle de quelques mégaélectron-volts; en plaçant dans le faisceau d'un bétatron deux plaques de la matière expérimentée, l'une devant, l'autre derrière une certaine épaisseur d'un corps déterminé, servant d'absorbeur, et en étudiant comparativement la radioactivité qui se manifeste dans les deux plaques après irradiation, on mesure un coefficient d'absorption relatif aux seuls photons ayant participé à la réaction choisie. Des résultats obtenus, en faisant varier, soit la nature [2], [3], soit l'épaisseur [4] de l'absorbeur, on pourra déduire une énergie moyenne (énergie effective E_e) des photons participant à la réaction, ainsi qu'une section efficace globale

$$\left[\sigma_{\text{intégrée}} = \int_0^\infty \sigma(k)\,\mathrm{d}k\right].$$

2° Un procédé très ingénieux a été appliqué au synchrotron de l'Université de Cornell [5] : le dispositif mesurant l'action des photons était déverrouillé seulement pendant un très court instant après la détection d'un électron ayant traversé l'anticathode et ayant une énergie déterminée liée à celle du photon correspondant. La méthode n'est applicable qu'à des intensités extrêmement faibles, puisque les photons sont, en quelque sorte, repérés un à un.

Dans le cas général, on étudie l'action d'ensemble de tout le spectre de freinage. L'intensité de ce spectre est mesurée en unités arbitraires par un « moniteur », c'est-à-dire, très fréquemment, une chambre d'ionisation placée dans le faisceau. Soit $P(k, E)\,\mathrm{d}k$, la répartition spectrale par centimètre carré, normalement à l'axe du faisceau, au niveau de l'expérience, du nombre de photons d'énergie comprise entre k et $k + \mathrm{d}k$, pour une indication déterminée du moniteur. Si la réaction photonucléaire, de section efficace $\sigma(k)$, se produit dans une plaque du corps étudié comportant N atomes/cm², normalement au faisceau (*fig.* 1), le nombre d'atomes touchés par cette réaction par centimètre carré pour l'indication considérée du moniteur, sera

$$g = \int_0^E NP(k, E)\,\sigma(k)\,\mathrm{d}k.$$

Le dispositif expérimental permettra de mesurer g, mais pour obtenir la fonction $\sigma(k)$, il faut connaître g pour un ensemble de spectres aussi variés que possible. La façon la plus simple de faire varier le spectre est de modifier l'énergie des électrons E;

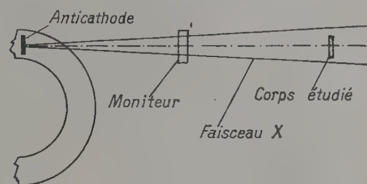


Fig. 1.

g devient alors une fonction de E :

$$g(E) = \int_0^E N\,P(k, E)\,\sigma(k)\,\mathrm{d}k. \tag{1}$$

La fonction $g(E)$ est donnée par l'expérience et sa représentation graphique sera dite courbe d'excitation.

L'équation intégrale (1) permettra de calculer $\sigma(k)$, si l'on connaît, aussi exactement que possible :

1° L'énergie E des électrons frappant l'anticathode.

2° La fonction à deux variables $P(k, E)$, qui dépend elle-même :

a. de la fonction $\Phi(k, E)$, section efficace relative au rayonnement de freinage;

b. de l'étalonnage absolu du moniteur.

A. **Mesure de l'énergie des électrons** E. — Dans les appareils à anticathode externe, on peut envisager une mesure directe de E, par déviation magnétique ou focalisation à l'aide d'une lentille magnétique, du faisceau d'électrons.

Dans la plupart des bétatrons usuels, c'est impossible et l'on doit utiliser les propriétés du champ accélérateur lui-même (*fig.* 2).

Pendant la plus grande partie de l'accélération, les électrons se déplacent sur un cercle de rayon sensiblement constant r, en raison des caractéristiques du champ magnétique alternatif créé entre les pièces polaires. Des bobines supplémentaires, traversées par des courants très brefs, provoquent des modifications du champ, permettant :

1° l'injection des électrons un peu après le moment où l'induction magnétique $\mathcal{B}$ est nulle;

2° leur déviation (expansion), au temps θ, pour les amener progressivement sur l'anticathode.

Sur le cercle de rayon r, on a

$$\mathrm{d}E = \frac{e}{2\pi r}\,\mathrm{d}\Phi$$

(e, charge de l'électron; Φ, flux magnétique).

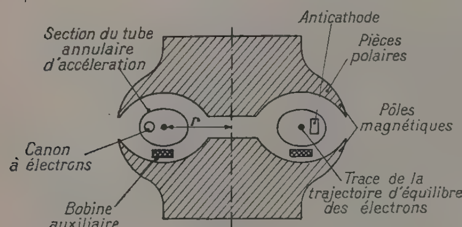
D'autre part, aux bornes d'une bobine auxiliaire placée dans le même champ et comportant p spires, se manifeste une différence de potentiel

$$V = p\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}E = \frac{e}{2\pi r p}\,V\,\mathrm{d}t.$$

E sera proportionnel à $\int_0^\theta V\,\mathrm{d}t$.

Plusieurs procédés sont utilisés sur ces bases. On peut :

1° Laisser θ fixe, voisin d'un quart de la période du champ alternatif, mais faire varier $\mathcal{B}_{max}$. E sera proportionnel à Φ_{max} donc à $\mathcal{B}_{max}$.



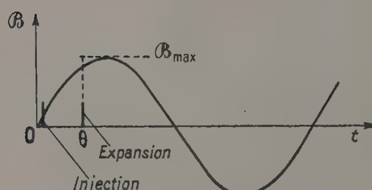


Fig. 2.

2° $\mathcal{B}_{max}$ étant fixe, rendre θ variable et mesurer l'intégrale $\int_0^\theta V\,\mathrm{d}t$, grâce à un montage intégrateur approprié. C'est un dispositif de ce type qui est prévu par certains constructeurs.

3° Employer la méthode précise, mais délicate à mettre en œuvre, développée par L. Katz et ses collaborateurs à l'Université de Saskatchewan [6]. Ici aussi $\mathcal{B}_{max}$ reste fixe; un circuit intégrateur fournit à chaque instant une tension proportionnelle à $\int_0^t V\,\mathrm{d}t$ et l'expansion est déclenchée lorsque cette tension atteint une valeur très exactement déterminée. La stabilisation est de l'ordre de 0,005 MeV pour un bêtatron de 22 MeV maximum. Ce procédé a le grand avantage, non seulement de mesurer correctement E, mais aussi de fixer avec précision le moment de l'expansion, impulsion par impulsion.

Quelle que soit la méthode utilisée, il est indispensable d'effectuer un étalonnage, à l'aide de réactions nucléaires dont le seuil est bien connu, par exemple : $^{12}C\,(\gamma,\ n)\,^{11}C$ 18,7 MeV; $^{63}Cu\,(\gamma,\ n)\,^{62}Cu$ 10,9 MeV, $^{9}Be\,(\gamma,\ n)\,^{8}Be$ 1,67 MeV.

La détermination exacte des seuils présente quelques difficultés parce que les courbes d'excitation sont plus ou moins tangentes à l'axe des énergies, ce qui rend le point de contact peu net. Divers auteurs se sont attachés à ce problème [7], [8], [9]. Dans bien des cas on vérifie que la courbe est sensiblement une parabole au voisinage du seuil; en traçant la courbe des racines carrées on obtient alors une droite dont l'intersection avec l'axe des énergies donne le seuil avec exactitude. La question vient d'être étudiée à nouveau par MM. Basile et Schuhl [10].

B. **Section efficace relative au rayonnement de freinage.** — Il serait certainement très avantageux de pouvoir déterminer expérimentalement la fonction à deux variables $P\,(k, E)$, mais il sera montré plus loin que le problème n'est pas facile. Jusqu'à présent, on s'est contenté, en général, des résultats théoriques, obtenus dès 1934, par H. Bethe et W. Heitler [11] en ce qui concerne le rayonnement de freinage.

Un électron d'énergie totale E_0 ($E_0 = E + \mu$; μ, masse au repos de l'électron en unités d'énergie) (*fig.* 3) passant dans le champ d'un noyau de nombre

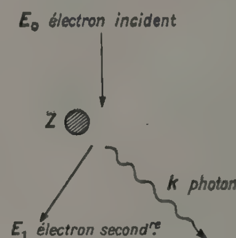


Fig. 3.

atomique Z peut donner naissance à un photon d'énergie k et à un électron secondaire d'énergie E_1. Le champ du noyau étant décrit par un potentiel de Thomas-Fermi et les vitesses des électrons primaires et secondaires étant assimilées à la vitesse de la lumière, la section efficace, intégrée par rapport à tous les angles d'émission, s'écrit

$$\Phi(k, E)\,\mathrm{d}k = \frac{4Z^2}{137}\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2\frac{\mathrm{d}k}{k}\left[\left[1+\left(\frac{E_1}{E_0}\right)^2-\frac{2}{3}\frac{E_1}{E_0}\right]\log_e\frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{9}\frac{E_1}{E_0}\right]$$

$$(k \neq E_1 - E_0).$$

Du fait des approximations utilisées, cette formule sera peu sûre lorsque k sera voisin de $E = E_0 - \mu$.

La section efficace différentielle montre une dépendance marquée par rapport à l'angle des directions de l'électron incident et du photon émis; en outre la diffusion élastique de l'électron incident dans l'anticathode lui impose au moment où se produit le freinage une déviation par rapport à sa direction première.

Ce problème complexe a été traité par L. I. Schiff [12], [13], en admettant que les directions des électrons se répartissent à chaque niveau de l'anticathode selon une loi gaussienne. Il a obtenu ainsi une loi de variation de l'intensité avec l'angle, mais surtout, il a montré que la répartion spectrale est pratiquement indépendante de cet angle. Il a également donné deux expressions de cette répartition spectrale : il semble bien que la plus simple des deux soit suffisante dans le cas envisagé ici. C'est celle qu'utilisent la plupart des expérimentateurs, par exemple ceux de l'équipe canadienne [14]

$$\lambda \Phi(k, E)\,\mathrm{d}k = \frac{4Z^2}{137}\left(\frac{e^2}{\mu}\right)^2 \frac{\mathrm{d}k}{k}\left[\frac{(E_0+E_1)^2}{E_0^2} - \frac{E_0^2+E_1^2}{E_0^2} \times \log_e\left(\left(\frac{\mu k}{2E_0E_1}\right)^2 + \left(\frac{Z^{\frac{1}{3}}}{191}\right)^2\right)\right]$$

$$(k = E_0 - E_1).$$

On trace souvent les courbes $\Phi(k, E) \times k$ qui donnent la répartition énergétique dans le spectre en fonction de k (*fig.* 4).

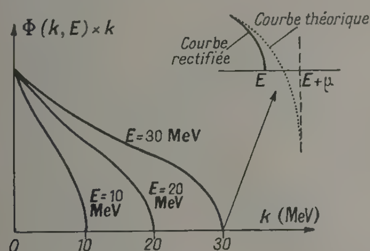


Fig. 4.

On constate, comme il est naturel du fait des approximations, une légère anomalie au voisinage de $k = E$: la fonction calculée tend vers $-\infty$ pour $k = E + \mu$ et prend une valeur non nulle pour $k = E$. On est amené à opérer une rectification afin de rejoindre la valeur zéro pour $k = E$.

Il est intéressant également de tracer les courbes $\Phi(k, E)$ (*fig.* 5), donnant la répartition en nombre de photons.

On constate que chaque spectre comporte assez peu de photons d'énergie voisine du maximum et une quantité considérable de photons de faible énergie. Par exemple si l'énergie des électrons est de 32 MeV, leur freinage dans le platine fournira sept fois plus de photons de 10 MeV que de photons de 30 MeV. C'est un fait qu'il faut avoir à l'esprit lorsque l'on veut interpréter les effets d'un tel rayonnement.

Il importe de remarquer que ces résultats ne supposent pas une anticathode infiniment mince, puisque Schiff tient compte de la diffusion des électrons, mais qu'ils ne s'appliqueraient pas à une anticathode trop épaisse, en raison de la perte d'énergie des électrons dans leur traversée d'une telle cible. Or, l'épaisseur usuelle des anticathodes en métal lourd (platine par exemple) est de l'ordre de 1,5 mm, ce qui est trop fort pour que la théorie soit valable sans correction. Il semble bien, cependant, que les corrections à appliquer réellement soient beaucoup plus faibles que celles auxquelles on s'attendrait, et même qu'elles puissent être considérées comme négligeables : cela doit provenir du fait que, durant l'expansion, les électrons ne

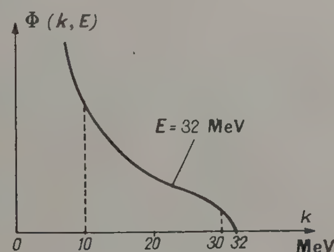


Fig. 5.

s'écartent que progressivement de leur trajectoire d'équilibre et qu'ils ne font que frôler l'anticathode dont ils ne traversent qu'une partie. On conçoit donc qu'une cible épaisse puisse, en fait, fonctionner à peu près comme une cible mince.

La fonction $\Phi(k, E)$ ne doit évidemment pas être utilisée telle quelle : il faut la multiplier par des coefficients inférieurs à 1, $\varphi(k)$, pour tenir compte de l'absorption des photons dans le verre de l'ampoule et dans les dispositifs situés en avant de la zone d'expérience. Pour être tout à fait correct, il faudrait tenir compte de bien d'autres éléments : participation des électrons atomiques au freinage, émission secondaire lors de la traversée du verre ou d'autres matières, etc. Ce seraient des corrections assez faibles, de l'ordre de grandeur des incertitudes de la théorie. Pour l'objet qui nous occupe, il n'est d'ailleurs pas nécessaire que $\Phi(k, E)$ soit connu avec une extrême précision, car l'on constate que de légères variations autour d'une valeur moyenne ne modifient les courbes d'excitation correspondant à une section efficace donnée *a priori*,

que dans des proportions largement inférieures aux erreurs expérimentales.

C. **Étalonnage du moniteur**. — Les indications du moniteur, qui sont comparables, lorsque l'on fonctionne à la même énergie maximum E (énergie cinétique des électrons), ne sont pas d'une interprétation aussi facile lorsqu'on fait varier cette énergie maximum, car alors, le spectre se modifie d'une mesure à l'autre. Il faut donc étalonner le moniteur.

La méthode la plus directement reliée à la théorie consisterait à mesurer l'intensité électronique responsable du rayonnement. Dans les appareils à anticathode interne, c'est pratiquement impossible et, en outre, l'épaisseur moyenne traversée par les électrons est mal connue, ainsi qu'il a été vu plus haut. Lorsque l'anticathode est extérieure, au contraire, ce procédé est utilisable et a été mis en œuvre [15] à l'aide d'une chambre de Faraday d'un modèle particulier.

En général, on opère de façon plus indirecte : on mesure l'intensité globale d'un phénomène connu, lié au nombre de photons de chaque énergie reçus par le dispositif. Ce nombre de photons pour la tranche d'énergie de k à $k + \mathrm{d}k$, est donné par $\lambda(E)\,\Phi(k, E)\,\varphi(k)\,\mathrm{d}k$, λ étant un coefficient de proportionnalité à trouver, $\varphi(k)$ le coefficient d'absorption valable pour les photons d'énergie k dans l'expérience d'étalonnage considérée.

Si l'on sait, *a priori*, calculer la contribution moyenne $r(k)$ de chaque photon d'énergie k au phénomène choisi, le résultat d'ensemble sera

$$R(E) = \lambda \int_0^E \Phi(k, E)\,\varphi(k)\,r(k)\,\mathrm{d}k.$$

L'étalonnage consistera en une mesure, pour chaque valeur de E, de $R(E)$ correspondant à une *indication fixée à l'avance du moniteur*.

On en déduira $\lambda(E)$, ce qui permettra de calculer les fonctions $P(k, E)$ considérées ci-dessus.

Pour réaliser cet étalonnage plusieurs expérimentateurs ont utilisée une réaction nucléaire, déjà étudiée par ailleurs et connue avec précision [16], [17], [18].

Beaucoup d'autres ont adopté la méthode courante dans le cas des rayons X de faible énergie et des rayons γ des corps radioactifs et consistant en une mesure d'*ionisation*, exprimée en rœntgens, dans une chambre d'ionisation. Le plus difficile est alors d'estimer correctement $r(k)$, représentant l'ionisation moyenne due à un faisceau d'un photon d'énergie k par centimètre carré.

Pratiquement, on place la chambre d'ionisation dans un bloc de matière et ce sont les particules ionisantes, les électrons Compton et ceux des paires, essentiellement, prenant naissance dans le bloc qui sont à l'origine de l'ionisation mesurée.

Certains auteurs ont cherché à calculer directement l'ionisation produite par des photons d'énergie k, grâce à la connaissance des phénomènes élémentaires [19], [20], [21].

D'autres, en particulier L. Katz et ses collaborateurs [14], ont eu recours à une formule établie dès 1934 par L. H. Gray [22], pour des rayons γ de quelques mégaélectron-volts. Afin de l'adapter aux rayons X de 10 à 30 MeV, on doit utiliser un bloc épais d'une matière formée d'éléments de nombres atomiques aussi voisins que possible de ceux des composants de l'air. Pratiquement, ce sera, par exemple, un cube de plexiglas, avec au centre, à une distance e de la face d'entrée des rayons X, une cavité cylindrique dans laquelle est placée une chambre d'ionisation, soigneusement étalonnée, du type Victoreen (*fig.* 6).

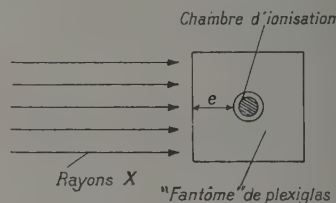


Fig. 6.

La formule de Gray s'écrit

$$W_a = R\rho W,$$

R, ionisation, en rœntgens, mesurée dans la chambre d'ionisation;

ρ, rapport des pouvoirs d'arrêt des électrons $\left(-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)$ dans le plexiglas et dans l'air;

W, énergie nécessaire, en moyenne, pour la création d'une paire d'ions dans l'air;

W_a, énergie totale des photons absorbés par centimètre cube de plexiglas, pour une mesure d'ionisation R.

Connaissant, *a priori*, l'absorption des photons d'énergie k dans le plexiglas, on déduira $r(k)$ du rapport $\frac{W_a}{R}$.

La constance de ρ et de W est très suffisamment vérifiée pour les énergies considérées (jusqu'à 30 MeV), mais l'hypothèse la plus délicate est celle de l'équilibre, à partir d'une certaine profondeur dans le plexiglas, entre les photons et les électrons secondaires : cela revient à admettre que l'énergie photons absorbée par centimètre cube de plexiglas est égale à l'énergie électrons absorbée dans le même volume. En raison du parcours important des électrons les plus énergiques, on devra prendre une valeur élevée pour e (7 cm au minimum pour un bétatron de 30 MeV).

Mais, alors, la composition du faisceau se modifie dans le bloc, du fait de l'absorption, de la réémission de photons secondaires par effet Compton et aussi par freinage des électrons. Il n'est pas aisé d'estimer cette composition à toutes les profondeurs dans le plexiglas et de fixer à quel niveau sera calculée la valeur W_u, lorsque la chambre d'ionisation est à la profondeur *e*.

En outre, à partir de 20 MeV, les protons des réactions (γ, p) peuvent apporter un élément d'erreur, assez délicat à apprécier.

Dès que le bétatron dépasse une énergie de 25 MeV, la méthode d'ionisation est donc considérée comme peu sûre. Elle a cependant pu être améliorée par l'étude de la variation de l'ionisation derrière des épaisseurs croissantes de matières diverses (courbes de transition) [23].

Une *mesure plus directe du flux de photons* apparaît comme indispensable, au moins à titre de contrôle. Les sections efficaces de l'effet Compton et de formation de paires étant suffisamment bien connues aux diverses énergies, c'est à ces phénomènes qu'on a recours. On tirera également de ces expériences une vérification de la forme du spectre.

L'étude des paires à la chambre de Wilson, dans un champ magnétique a donné des résultats, en vérité assez grossiers, qui sont en assez bon accord avec la formule de Schiff [24].

L'analyse dans un champ magnétique par des compteurs, et plus spécialement par des cristaux scintillants associés à des photomultiplicateurs, des électrons produits dans un radiateur mince, est susceptible de donner de meilleurs résultats. Pour augmenter le rendement, on utilise, par exemple [25], [26], un montage (*fig.* 7) permettant de compter

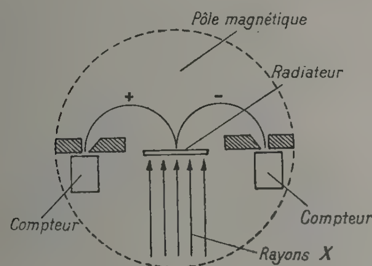


Fig. 7.

les coïncidences entre électrons positif et négatif dont la trajectoire est courbée selon les rayons r_+ et r_- tels que $r_+ + r_- = \text{const}$. La déviation à 180° permet en outre la focalisation des électrons émis sous un angle assez grand par rapport à la direction des photons : cet angle a une valeur moyenne non négligeable pour des photons de 20 MeV ($\simeq 1/40^e$ de radian) et la diffusion élastique dans le radiateur l'augmente beaucoup.

La principale difficulté provient de l'émission du rayonnement par courtes impulsions. Les coïncidences fortuites sont très nombreuses par rapport aux coïncidences vraies et sont d'autant plus probables que l'impulsion est plus courte. On ne peut donc employer cette méthode qu'à très faible intensité et par conséquent la durée des expériences est considérable si l'on veut une précision admissible.

Pour des énergies élevées le procédé est nettement plus favorable : effet Compton presque nul, angles à l'émission très faibles, section efficace de formation de paires plus élevée [27].

Enfin un procédé qui se développe actuellement et qui paraît avoir un grand avenir, consiste à absorber aussi complètement que possible l'énergie des photons dans de très gros cristaux ou dans des scintillateurs liquides de grande taille (plus de 1,00 m de long), équipés de nombreux photomultiplicateurs [28].

Toutes ces méthodes ont jusqu'à présent confirmé l'exactitude de la formule de Schiff, aux erreurs d'expérience près, ce qui justifie le calcul des sections efficaces tel qu'il est pratiqué par la plupart des chercheurs.

Détermination des courbes de section efficace. — La courbe d'excitation, définie ci-dessus, donne l'intensité d'un phénomène lié à la réaction nucléaire étudiée, en fonction de l'énergie des électrons E au moment de leur arrivée sur l'anticathode. Le plus souvent on mesure la radioactivité qui se manifeste dans le corps expérimenté, après un temps déterminé d'exposition au rayonnement. Connaissant la période du corps radioactif formé, on peut se ramener à l'activité à saturation pour une intensité donnée du bétatron (par exemple pour x rœntgens/mn selon les indications du moniteur). Cette méthode permet l'utilisation des techniques de la radioactivité (entraînement chimique en particulier) et, surtout, elle permet de séparer les diverses réactions possibles par la différence des périodes. Elle est impuissante lorsque le corps formé n'est pas radioactif [c'est le cas de la plupart des réactions (γ, α) sur les noyaux de nombre atomique faible] et elle ne donne pas des résultats complets lorsque le même noyau final peut être obtenu par plusieurs voies : exemple, ^{32}S (γ, d) et ^{32}S (γ, np).

On est donc amené également à étudier directement les particules émises par les corps irradiés, grâce à l'emploi de plaques nucléaires, de chambres de Wilson, de compteurs proportionnels, de scintillateurs.

La principale difficulté réside dans le fond considérable, généralement produit par le bétatron. En outre il n'est pas possible de distinguer les diverses réactions donnant la même particule : (γ, n), (γ, 2 n), (γ, np), etc. Ces méthodes n'en sont pas moins précieuses pour compléter la précédente et aussi

pour fournir des renseignements sur les répartitions angulaires et énergétiques des particules émises.

Dans tous les cas, on se trouve en présence de l'équation intégrale

$$g(E) = N \int_0^E P(k, E)\, \sigma(k)\, dk,$$

d'où il importe de tirer la fonction $\sigma(k)$, connaissant la fonction expérimentale $g(E)$ et la fonction à deux variables préalablement calculée $P(k, E)$.

1° On a envisagé de représenter $P(k, E)$ par un développement en série en fonction de $\frac{k}{E}$ et de E et de déduire $\sigma(k)$ d'opérations analytiques appropriées [29]. Un procédé simplifié s'inspirant de la même idée est souvent utilisé pour obtenir une première approximation de $\sigma(k)$. Assimilant la répartition d'énergie de Schiff à sa valeur moyenne $S(E)$, on a avec les notations définies plus haut :

$$P(k, E) = \lambda(E) \frac{S(E)}{k} \varphi(k),$$

les fonctions $\lambda(E)$ (étalonnage du moniteur) et $\varphi(k)$ (absorption des photons) étant connues.

D'où

$$g(E) = N \int_0^E \lambda(E) \frac{S(E)}{k} \varphi(k)\, \sigma(k)\, dk,$$

$$\frac{g(E)}{\lambda(E)\, S(E)} = N \int_0^E \frac{\varphi(k)\, \sigma(k)}{k}\, dk,$$

$$\frac{d}{dE}\left[\frac{g(E)}{\lambda(E)\, S(E)}\right] = N \frac{\varphi(E)\, \sigma(E)}{E},$$

σ est déduit de cette dérivation [30], [31].

2° L'équipe de l'Université de Saskatchewan part d'un calcul approché de l'intégrale. D'après un premier article [14], elle opérait tout d'abord de la façon suivante (*fig.* 8).

La suite des énergies à considérer est divisée en tranches égales limitées par les valeurs $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, et ayant pour valeurs médianes $l_2, \ldots, l_n \ldots$,

On pose

$$P(l_n, E) = \int_{k_{n-1}}^{k_n} P(k, E)\, dk \simeq \frac{P(k_n, E) + P(k_{n-1}, E)}{2} (k_n - k_{n-1})$$

(on fait une correction lorsque k_n est voisin de E).

L'ensemble des valeurs utiles de $P(l_n, E)$ est calculé au préalable sous forme d'un tableau à double entrée avec un espacement des valeurs successives de k égal à 1 MeV. L'intégrale g est alors exprimée ainsi

$$g(E) = N \sum_0^{E-\varepsilon} \sigma(l_n)\, P(l_n, E).$$

Ayant choisi k_1 de façon que

$$g(k_1) = 0, \qquad g(k_2) \neq 0,$$

on trouve

$$\sigma(l_1) = 0,$$
$$g(k_2) = NP(l_2, k_2)\, \sigma(l_2),$$
$$g(k_3) = N[P(l_2, k_3)\, \sigma(l_2) + P(l_3, k_3)\, \sigma(l_3)],$$
$$\ldots\ldots,$$
$$g(k_n) = N[P(l_2, k_n)\sigma(l_2) + \ldots + P(l_{n-1}, k_n)\sigma(l_{n-1}) + P(l_n, k_n)\, \sigma(l_n)],$$
$$\ldots\ldots$$

Ces équations linéaires donnent successivement

$$\sigma(l_2), \quad \sigma(l_3), \quad \ldots, \quad \sigma(l_n), \quad \ldots.$$

On conçoit que les erreurs aient une tendance à croître d'une équation à la suivante. En fait, dans l'application, on constate souvent de fortes oscillations des σ successifs, une valeur trop forte de l'un

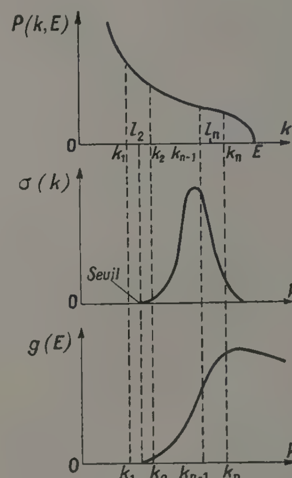


Fig. 8.

d'eux entraînant une diminution du suivant. Vers le bout de la courbe, on peut ainsi trouver des valeurs largement négatives. Tout ceci provient de la forme même de $\sigma(l_n)$:

$$\sigma(l_n) = \frac{\frac{g(k_n)}{N} - [P(l_2, k_n)\sigma(l_2) + \ldots + P(l_{n-1}, k_n)\sigma(l_{n-1})]}{P(l_n, k_n)}.$$

Le numérateur est la différence de deux termes de valeurs voisines : l'erreur relative est bien plus considérable que celle qui affecte g et les termes P. Le dénominateur $P(l_n, k_n)$, d'autre part, est calculé d'après la partie la moins sûre des courbes $P(k, E)$.

Katz et Cameron [32] ont cherché à réduire ces

erreurs par une méthode dite « de différence de nombres de photons » (photon-différence). Ils calculent

$$\Delta g(k_n) = g(k_n) - g(k_{n-1})$$

et mettent $\sigma(l_n)$ sous la forme suivante :

$$\sigma(l_n) = \frac{B(k_n)\,\Delta g(k_n)}{N} - [\Delta Q(l_2, k_n)\,\sigma(l_2) + \ldots + \Delta Q(l_{n-1}, k_n)\,\sigma(l_{n-1})].$$

Les fonctions B et ΔQ se déduisent facilement des fonctions P et peuvent être calculées à l'avance sous forme de tableaux; les fonctions B et ΔQ sont soigneusement « lissées », de façon à faire disparaître les petites irrégularités qui auraient pu s'y introduire. En outre l'intervalle (k_{n-}, k_n) a été réduit à 0,5 MeV.

Par ailleurs, les points expérimentaux de la courbe $g(E)$ ne sont connus qu'avec une précision de quelques pour-cent au mieux. Au lieu d'introduire brutalement ces valeurs dans les calculs, on commence par « lisser » la courbe, en s'efforçant, dans les limites des erreurs possibles, de lui donner un tracé admettant des dérivées première et seconde régulières et d'une forme voisine d'un type déterminé (*fig.* 9).

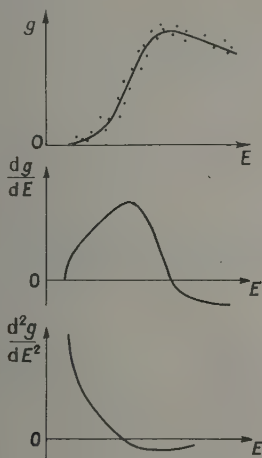


Fig. 9.

Moyennant ces multiples précautions, les Canadiens ont pu tracer de très nombreuses courbes de section efficace. On peut toutefois penser qu'il subsiste quelque arbitraire dans le calcul des fonctions B, d'après la connaissance assez peu sûre des spectres, entre $E - 0{,}5$ et E. D'autre part, il ne paraît pas facile d'estimer une erreur probable sur les résultats.

Conclusion. — Les bétatrons, dont l'énergie maximum atteint quelques dizaines de mégaélectron-volts, sont des appareils précieux pour l'étude des réactions photonucléaires. Malgré diverses difficultés inhérentes à la nature du rayonnement qu'ils émettent, des méthodes ont été mises au point et perfectionnées ces dernières années pour permettre une interprétation correcte des résultats expérimentaux. Des progrès sont certainement encore à faire dans la connaissance du spectre, la mesure de l'intensité absolue du rayonnement, et aussi dans le traitement des courbes d'excitation pour en déduire les sections efficaces.

D'ores et déjà une ample moisson de résultats est acquise et certains aspects de ceux-ci ont suscité des recherches théoriques dont l'intérêt est certain pour l'édification d'une théorie du noyau. Plusieurs auteurs ont présenté dernièrement des synthèses des résultats publiés, en particulier, R. Chastel [1], K. Strauch [33], J. S. Levinger [34]; les toutes dernières publications apportent quelques précisions mais n'ajoutent rien d'essentiel. Il y a donc lieu de se reporter à ces travaux.

Enfin, il convient de remarquer qu'il n'y a pas de différence fondamentale dans l'emploi, entre les bétatrons de 20 ou 30 MeV et les synchrotrons de 100 à 500 MeV qui permettent l'étude de nouveaux types de réactions faisant intervenir les interactions mésoniques.

Les techniques sommairement exposées ici sont donc susceptibles d'applications beaucoup plus étendues.

La documentation analysée ci-dessus a été rassemblée, discutée et mise au point en collaboration avec MM. Paul Chanson et Claude Magnan à l'occasion de recherches faites sur le bétatron Brown-Boveri de 31 MeV maximum de la Direction des Études et Fabrications d'Armement. Je suis heureux de remercier MM. Magnan et Chanson dont les avis et l'expérience scientifique m'ont été précieux.

Manuscrit reçu le 25 mars 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Chastel R. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 50 et 56.
[2] Koch H. W., Mc Elhinney J. et Cunningham J. A. — *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 318.
[3] Marshall L. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 345.
[4] Strauch K. — *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 973. Eyges L. — *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 981.
[5] Weil J. W. et Mc Daniel B. D. — *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 391.

[6] KATZ L. et coll. — *Canad. J. Research*, 1950, **28**, 113.
[7] MC ELHINNEY J., HANSEN A. O., BECKER R. A., DUFFIELD R. B. et DIVEN B. C. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 542.
[8] SHER R., HALPERN J. et STEPHENS W. E. — *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 387.
[9] OGLE W. E. et ENGLAND R. E. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 63.
[10] BASILE R. et SHUHL C. — *J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 372.
[11] HEITLER, W. — The quantum theory of radiation, édition 1954, p. 242.
[12] SCHIFF L. I. — *Phys. Rev.*, 1946, **70**, 87.
[13] SCHIFF L. I. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 252.
[14] JOHNS H. E., KATZ L., DOUGLAS R. A. et HASLAM R. N. H. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 1062.
[15] BERMAN A. et BROWN K. — *Phys. Rev.*, 1954, **96**, 83.
[16] SAGANE R. — *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 586.
[17] TERWILLIGER K. M. et JONES L. W. — *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 689.
[18] DE LABOULAYE H., BEYDON Mlle J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **239**, 411.
[19] FOWLER W. A., LAURITSEN C. C. et LAURITSEN T. — *Rev. Mod. Phys.*, 1948, **20**, 236.
[20] LAX M. — *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 61.
[21] JOHNS H. E., TILL J. E. et CORMACK D. V. — *Nucleonics*, 1954, **10**, 40.
[22] GRAY L. H. — *Proc. Roy. Soc.*, 1936, A **156**, 578.
[23] BLOCKER W., KENNEY R. W. et PANOFSKY W. K. H. — *Phys. Rev.*, 1950, **79**, 419.
[24] KOCH H. W. et CARTER R. E. — *Phys. Rev.*, 1950, **77**, 165.
[25] ROSENBLUM E. S., SCHRADER E. F. et WARNER R. M. — *Phys. Rev.*, 1952, **88**, 612.
[26] LAWSON J. L. et PERLMAN M. L. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1190.
[27] DE WIRE J. W., ASHKIN A. et BEACH L. A. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 505.
[28] FOOTE R. S. et KOCH H. W. — *Rev. Scient. Inst.*, 1954, **25**, 746.
[29] SPENCER L. V. — *Phys. Rev.*, 1952, **87**, 196, A.
[30] BALDWIN G. C. et KLAIBER G. S. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 1156.
[31] SAGANE R. — *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 586.
[32] KATZ L. et CAMERON G. W. — *Canad. J. Phys.*, 1951, **29**, 518.
[33] STRAUCH K. — *Annual Rev. Nuclear Sc.*, 1953, **2**, 105.
[34] LEVINGER J. S. — *Annual Rev. Nuclear Sc.*, 1954, **4**, 13.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 16, NOVEMBRE 1955, PAGE 882.

INSTRUMENTATION DANS L'INFRAROUGE LOINTAIN

Par CLAUDE HAEUSLER,
Laboratoire d'Infrarouge, Paris.

Sommaire.. — Dans cet exposé, nous étudions les divers éléments d'un spectrographe grandes longueurs d'onde (source lumineuse, système dispersif, filtres, détecteur); nous indiquons ensuite les différents types de montages utilisés ainsi que quelques performances obtenues à l'aide de ces montages.

Le domaine infrarouge s'étend du visible (0,75 μ) au domaine des micro-ondes (1 mm environ).

En 1870, Magnus, en étudiant le pouvoir émissif dans l'infrarouge du sel gemme, de la fluorine et de la sylvine, observe que certaines substances possèdent, dans l'infrarouge, une forte réflexion sélective; de cette observation, naît la méthode des « rayons restants », qui permet d'aborder l'étude de l'infrarouge lointain. En 1899, Rubens et Aschkinass observent que le quartz redevient transparent dans l'infrarouge lointain. Le fait que l'indice de réfraction du quartz est beaucoup plus grand dans l'infrarouge lointain que dans l'infrarouge proche permet alors à Rubens d'imaginer la méthode de l'« isolement focal ». Les premiers travaux entrepris en infrarouge lointain (émission de diverses sources : arc au mercure, manchon Auer, etc.) furent effectués avec des séparateurs de radiations basés sur le principe des « rayons restants » ou de l'« isolement focal ».

En 1910, Rubens et Wood étudient le rayonnement infrarouge lointain du manchon Auer. Pour mesurer les longueurs d'onde des radiations émises, ils construisent des interféromètres à lames de quartz.

Par la suite, l'utilisation des réseaux comme système dispersif se généralise.

Les premiers réseaux utilisés furent des réseaux à fils, leur réalisation est fort simple ce qui explique leur succès. Ce succès fut d'ailleurs éphémère car, comme nous le verrons, les réseaux à fils présentent de sérieux inconvénients.

Si la technique de l'infrarouge s'étendant du visible à 40 μ environ est parfaitement au point, il n'en est pas de même pour l'infrarouge du domaine des « rayons restants ». Quelques spectrographes seulement ont été construits dans le monde, de sorte que ce domaine est encore très mal étudié.

Les difficultés rencontrées dans l'étude de l'infrarouge lointain résultent des faits suivants :

1° Les sources utilisées émettent beaucoup plus d'énergie dans l'infrarouge proche que dans l'infrarouge lointain. Il est donc nécessaire d'une part,

d'éliminer l'infrarouge proche et, d'autre part, d'employer des systèmes optiques à grande ouverture afin d'utiliser au maximum l'énergie disponible.

2° Les bandes d'absorption de la vapeur d'eau sont particulièrement intenses dans le domaine des grandes longueurs d'onde. Il est donc indispensable d'éliminer la vapeur d'eau dans les spectrographes soit en les remplissant d'un gaz sec et inactif en absorption infrarouge, soit en y faisant le vide.

Dans la suite de cet exposé, nous étudierons les divers organes d'un spectrographe grandes longueurs d'onde (source lumineuse, système dispersif, filtres, détecteur) et nous indiquerons les types de montages utilisés.

I. — Sources.

Deux types de sources sont utilisés en infrarouge : les sources à émission thermique (bec Auer, globar, filament Nernst, etc.) et les lampes à arc (arc au mercure, arc au zirconium, etc.).

1° **Sources à émission thermique** [1]. — On sait qu'un corps noir, par définition, est un corps susceptible d'absorber toutes les radiations qu'il reçoit. L'émission du corps noir est définie par les lois classiques de Kirchhoff, Stefan et Wien.

Certains corps, portés à une température déterminée, ont une répartition spectrale de l'énergie émise semblable à celle du corps noir à la même température. Ce sont : les corps gris et les métaux. Les substances qui admettent un coefficient d'absorption variant très peu avec la longueur d'onde sont dénommées corps gris; la répartition spectrale de l'énergie émise par les corps gris est semblable à celle du corps noir, mais les énergies sont plus faibles. Le carbone fait partie de cette catégorie. Le rayonnement infrarouge du cratère positif de divers modèles d'arcs entre électrodes de carbone a été étudié [2], [3]. Ces arcs constituent d'excellentes sources d'infrarouge proche. Ils peuvent également être utilisés avec succès jusqu'à 100 μ.

L'énergie, émise par les métaux incandescents, est plus faible que celle du corps noir, mais le maximum d'émission du métal incandescent est déplacé généralement vers les courtes longueurs d'onde par rapport au maximum du corps noir à la même température. Des filaments métalliques incandescents (tungstène, nichrome) ont été utilisés avec succès comme source d'infrarouge proche. Ces filaments émettent généralement peu dans l'infrarouge lointain.

Rayonnement des substances a absorption sélective. — Si nous portons à l'incandescence une substance présentant des bandes d'absorption intenses, l'émission sera importante dans les domaines spectraux correspondant à ces bandes d'absorption et plus faibles dans les autres domaines (loi de Kirchhoff). Le spectre d'émission d'une substance à absorption sélective sera donc constitué par une émission sélective avec un fond continu relativement plus faible. Ces substances sont particulièrement intéressantes pour réaliser des sources d'infrarouge; en effet un choix judicieux de substances, absorbant fortement dans une région déterminée de l'infrarouge, permettra de réaliser une source émettant convenablement dans cette région. Les oxydes des terres rares sont les substances les plus utilisées et constituent la plupart des sources thermiques.

a. Manchon Auer. — Le manchon Auer est constitué par un manchon recouvert d'un mélange d'oxydes de thorium et de cérium. L'oxyde de thorium n'absorbe que les radiations de grandes longueurs d'onde, tandis que l'oxyde de cérium absorbe à haute température dans le spectre visible, en particulier dans le bleu.

La loi de Kirchhoff laisse donc prévoir que le manchon Auer émettra beaucoup dans le bleu, peu dans le rouge et notablement dans l'infrarouge lointain. Ceci a été confirmé par les mesures de Rubens. Les manchons Auer ne sont plus utilisés à l'heure actuelle car ils sont d'un emploi peu commode [4] et leur émission est généralement instable, bien que divers procédés aient été proposés pour augmenter leur stabilité.

b. Filament Nernst [5]. — Le filament Nernst est constitué par un mélange de plusieurs oxydes : oxydes de cérium, de thorium, de zirconium, etc. qui présentent tous une forte émission sélective dans l'infrarouge. Ces filaments émettent peu dans l'infrarouge lointain, ils ne sont utilisables que jusqu'à 15 μ environ.

c. Globar [6]. — Le globar est constitué par un bâton de carbure de silicium; il n'émet que jusqu'à 45 μ environ, il est donc inutilisable en infrarouge lointain.

d. Filament de platine entouré d'oxyde de thorium. — Randall [7], [8] et Oetjen [9] utilisent avec succès, sur les spectrographes à grandes longueurs d'onde qu'ils décrivent, des filaments de platine entourés d'oxyde de thorium. Le filament utilisé par Oetjen a pour dimensions $10{,}1 \times 0{,}76 \times 0{,}012$ cm, il est chauffé à 1300° K par un courant de 100 A. Oetjen utilise cette source entre 40 et 150 μ; il n'existe aucune étude relative à ce type de source. L'auteur signale qu'elle émet considérablement dans l'infrarouge proche, ce qui constitue un grave inconvénient.

2° **Lampe à vapeur de mercure.** — Rubens est l'un des premiers à avoir étudié le spectre d'émission des lampes à vapeur de mercure. Pour faire cette étude il utilisait un séparateur de radiations basé sur le principe des « rayons restants » [4], [10]. Il attribuait à la lampe à vapeur de mercure un spectre de raies caractéristiques du mercure en particulier à 210 et 320 μ. Des études plus récentes entreprises par Koch [11] et Dahlke [12] avec des spectrographes à réseaux, il résulte que la lampe à vapeur de mercure émet un spectre continu présentant des maxima prononcés vers 210 et 320 μ. Les lampes à vapeur de mercure ont été utilisées par plusieurs auteurs, notamment Dahlke, Koch, Maar, Hopf et, plus récemment, par Mc Cubbin. Les caractéristiques de la lampe utilisée par Mc Cubbin sont les suivantes : enveloppe de quartz de longueur 18 mm, consommation 80 W. Il s'établit dans cette lampe une pression de 30 atm.

II. — Système dispersif.

Les réseaux sont utilisés exclusivement, et en particulier les réseaux échelette. Les prismes ne sont pas utilisés car :

1° Il n'existe pas de substances transparentes à l'infrarouge entre 40 et 80 μ dans lesquelles on puisse tailler un prisme. Le quartz ne redevient transparent que vers 80 μ, le sel gemme n'est plus transparent à partir de 15 μ, quant au KRS 5 (iodobromure de thallium) il n'est utilisable que jusqu'à 40 μ.

2° Les énergies mises en jeu dans le domaine infrarouge lointain sont très faibles, ce qui impose, comme nous l'avons vu, des systèmes optiques à grande ouverture, c'est-à-dire en particulier un système dispersif de grandes dimensions. Si l'on construit des réseaux de grandes dimensions (20 cm de long et même plus), par contre, il n'est pas possible de réaliser des prismes de mêmes dimensions.

Réseaux. — Un réseau par réflexion est constitué par un ensemble de sillons équidistants, tracés sur une surface parfaitement polie. Les réseaux utilisés en infrarouge sont tracés le plus souvent sur des surfaces métalliques ou vitreuses qui sont ensuite métallisées (généralement à l'aluminium). Les réseaux à fils, qui sont des réseaux par transmission, sont constitués par des fils métalliques, de diamètre constant, séparés par des intervalles égaux. Soit un réseau à n traits/mm, éclairé sous un angle d'incidence i, on observera un maximum d'énergie diffractée dans une direction donnée, si la relation suivante est vérifiée :

$$\sin i + \sin r = nK\lambda,$$

où r est l'angle de diffraction, λ la longueur d'onde de la lumière diffractée, et K un nombre entier définissant l'ordre d'interférence.

Cette relation résulte d'une théorie élémentaire

Tableau I.

Auteur.	(a) mm.	h (μ).	Nombre total de traits.	Dispersion du premier ordre (μ/mm).	Région d'utilisation λ_{min} (μ).	Région d'utilisation λ_{max} (μ).	Dimensions (cm).
Maur	4	70	33	–	25	450	12 × 13,5
Koch I	3,9	45	30	7,5	60	520	-
» II	6,2	75	18	12	60	520	–
» III	6,0	110	18	11,5	60	520	–
Cartwright et Czerny	3,8	31	31	–	40	380	12 × 12
Hopf	2	80	100	–	40	600	20 × 20
Hohls	0,33	11	330	–	13	55	10 × 10
Hellwege	0,33	9,5	–	–	28	70	–
Kühne	0,40	13	300	–	20	90	12 × 12

des réseaux, elle est indépendante de la forme donnée aux sillons. L'énergie est dispersée dans les ordres successifs. On peut concentrer l'énergie dans certains ordres privilégiés en donnant une forme appropriée aux sillons équidistants formant le réseau. Nous reviendrons par la suite sur ce problème important en étudiant les réseaux lamellaires et les réseaux échelette.

Réseaux à fils [14]. — Ils furent imaginés par Frauenhofer qui les utilisait dans le visible. Ces réseaux sont d'une réalisation simple, aussi furent-ils utilisés en infrarouge lointain [15]. Actuellement, on y a renoncé, d'une part parce qu'il est impossible de construire un réseau à fils qui concentre l'énergie dans un ordre déterminé, d'autre part parce que les fils constituant le réseau se comportent comme autant de petits miroirs cylindriques qui réfléchissent de la lumière parasite.

Réseaux lamellaires [16], [17], [18], [19]. — Ce sont des réseaux par réflexion dont les sillons sont taillés comme l'indique la figure 1. La forme de ces sillons entraîne, d'une part la disparition des spectres d'ordre pair, d'autre part la superposition d'un maximum d'intensité d'ordre K et d'un minimum d'ordre $K + 2$ ceci pour $K \geq 1$. Aux maxima d'ordre 0 correspondent les minima d'ordre 1 (*fig.* 2). Si donc on étudie, par exemple, le spectre d'ordre 1, les spectres d'ordre 2 et 4 n'existant pas, et, aux maxima du spectre d'ordre 1 correspondant les minima du spectre d'ordre 3, on ne sera gêné par conséquent que par le spectre d'ordre 5. Le spectre d'ordre 5 correspond à des lon-

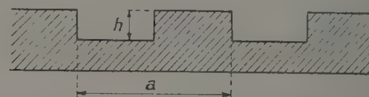


Fig. 1. — Forme caractéristique des traits d'un réseau lamellaire.

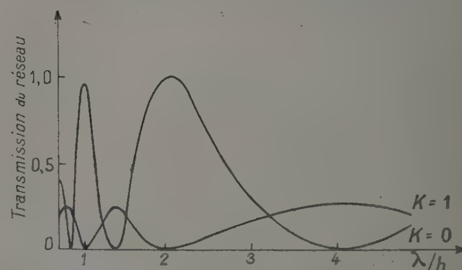


Fig. 2. — Répartition de l'énergie diffractée par un réseau lamellaire. Au maxima d'ordre 0, correspondent les minima d'ordre 1.

gueurs d'onde bien plus faibles que l'on peut espérer éliminer par des méthodes que nous indiquerons ultérieurement. Pour la construction de ces réseaux,

nous renvoyons aux articles de Mevel [16] et de Cartwright [20]. Les réseaux lamellaires ont été utilisés par plusieurs expérimentateurs dont les noms, ainsi que les caractéristiques de leurs réseaux, sont portés dans le tableau I. L'emploi des réseaux lamellaires a été abandonné en faveur des réseaux échelette, beaucoup plus lumineux. Cartwright indique que pour une même longueur d'onde, un réseau échelette peut donner $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ fois plus d'énergie qu'un réseau lamellaire.

Réseaux échelette [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], 30], [31], [32]. — Les réseaux échelette sont des réseaux par réflexion; la figure 3 en

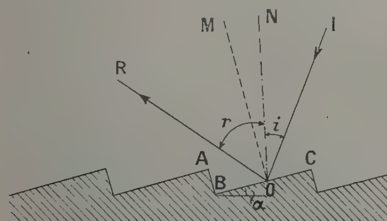


Fig. 3. — Forme caractéristique des traits d'un réseau échelette (α est l'angle de coupe).

schématise le profil caractéristique. Considérons un élément ABC du réseau, soit ON la normale au réseau et OM la normale à la lamelle réfléchissante BC; soit maintenant IO un rayon incident; de tous les rayons diffractés, celui qui est le plus intense se trouve dans une direction RO telle que l'angle IOM (angle d'incidence sur BC) soit égal à ROM; en effet dans cette direction particulière, la réflexion du faisceau incident sur la lamelle BC vient renforcer le phénomène de diffraction. On conçoit donc qu'en choisissant un réseau échelette de pas et d'angle de coupe adaptés, on puisse concentrer une grande partie de la lumière diffractée dans une direction déterminée. Si le réseau échelette est le plus lumineux des systèmes dispersifs, il ne présente cependant pas les propriétés intéressantes du réseau lamellaire, à savoir : inexistence des ordres pairs, correspondance à un maximum d'ordre K d'un minimum d'ordre $K + 2$
Les expérimentateurs utilisent à l'heure actuelle exclusivement les réseaux échelette [7], [8], [9], [33]. Mc Cubbin [33], [34], [35] décrit un spectrographe permettant d'étudier la région spectrale comprise entre 100 et 700 μ. Dans ce spectrographe, il utilise deux résaux, l'un pour l'étude de la région comprise entre 100 et 300 μ et l'autre pour celle comprise entre 300 et 700 μ. Le premier a 2,6 traits/mm (intensité maximum pour 135 μ dans le spectre de premier ordre), le deuxième a 1 trait/mm (intensité maximum pour 350 μ dans le spectre de premier ordre). L'un et l'autre sont en duralumin et admettent un angle de coupe de 10°. Oetjen[9] utilise dans la région de 40 à 150 μ, un réseau à 7,1 traits/mm dont l'angle de coupe est égal à 20° environ. L'intensité maximum se produit dans le premier ordre pour la longueur d'onde de 100 μ. Les réseaux utilisés en infrarouge lointain ont de grandes dimensions. Celui d'Oetjen mesure 17,7 × 22,7 cm; quant à celui de Randall, il mesure 25,4 × 50,8 cm.

Réseaux de Walsh. — Walsh [36] a préconisé un nouveau type de système dispersif pour l'infrarouge lointain. Ce système dispersif est basé sur le principe des réseaux zonés et sur celui des réseaux échelette.

III. — Élimination de la lumière parasite.

Il n'existe pas de filtres donnant entière satisfaction. Les auteurs utilisent divers types de filtres. Nous avons relevé six méthodes principales permettant de séparer l'infrarouge lointain de l'infrarouge proche; pour obtenir de bons résultats, il convient non pas d'utiliser une de ces méthodes, mais de les combiner entre elles.

1° **Utilisation de milieux absorbants.** — Cette méthode n'est pas particulière à l'infrarouge. Elle consiste à utiliser un milieu absorbant les radiations de courtes longueurs d'onde et transparent aux radiations à étudier. Dans l'infrarouge lointain, on utilise principalement : le quartz, la paraffine, la suie de corps organiques. A ce sujet, on lira avantageusement l'article de C. H. Cartwright [37]. L'auteur y étudie l'absorption de nombreuses substances solides, et notamment celle des couches très minces de ClNa, ClK, etc. étendues sur de la paraffine. Oetjen [9] utilise dans le spectrographe qu'il décrit des lames de quartz d'épaisseur 0,5 mm; ceci lui permet d'éliminer une grande partie des radiations de longueurs d'onde comprises entre 4 et 40 μ. Il utilise également de la paraffine en lames d'épaisseur 1 mm et de la suie de térébenthine qu'il colle sur des lames de paraffine.

2° **Isolement focal.** — Cette méthode, préconisée par Rubens et Wood [38] et Rubens et von Bayer [39], est basée sur le fait que l'indice de réfraction du quartz augmente avec la longueur d'onde des radiations incidentes. Si nous masquons la partie centrale d'une lentille de quartz et si nous l'éclairons par un faisceau d'infrarouge, l'infrarouge proche diverge à la sortie de la lentille et l'infrarouge lointain converge, ce qui permet d'éliminer l'infrarouge proche. Cette méthode a été utilisée par Koch [11], Hopf [40] et Maar [41] elle est actuellement reprise par Mc Cubbin [33], [34], [35].

3° **Rayons restants** [4], [10], [42]. — Certains cristaux ont la propriété de réfléchir sélectivement des radiations de longueurs d'onde déterminées. Si les radiations issues d'une source continue se réfléchissent plusieurs fois sur les mêmes cristaux, le rayonnement résiduel ne contiendra plus que les radiations de longueurs d'onde privilégiées (pourvu que le nombre de réflexions ait été suffisant). Ceci constitue le principe de la méthode des « rayons restants ». En réalité, cette méthode ne permet pas d'isoler des rayons monochromatiques mais des bandes plus ou moins larges suivant le nombre de réflexions et la nature des cristaux utilisés. Si l'on remplace dans un spectrographe un miroir plan par une lame cristalline présentant le phénomène de réflexion sélective dans le domaine des grandes longueurs d'onde, on pourra séparer partiellement l'infrarouge proche de l'infrarouge lointain. Utilisée

avec d'autres filtres, une telle lame peut donner d'excellents résultats. Oetjen [9] se sert pour travailler entre 40 et 70 μ d'une lame de ClNa et entre 110 et 150 μ d'une lame de KRS 5 (iodobromure de thallium).

4° **Modulateurs.** — Le flux lumineux de la source est modulé et la tension recueillie à la sortie du détecteur est amplifiée par un amplificateur accordé. Si le modulateur est constitué d'une substance opaque pour l'infrarouge lointain, mais transparente aux radiations de courtes longueurs d'onde, celles-ci ne seront pas modulées. Seules les radiations de grandes longueurs d'onde donneront à la sortie du détecteur une tension périodique susceptible d'être amplifiée. On élimine ainsi les radiations parasites de l'infrarouge proche. Ce procédé est couramment utilisé. Oetjen [9] notamment, utilise un modulateur constitué par du KBr.

5° **Filtres de White** [43]. — La figure 4 représente la distribution de l'intensité diffractée en fonction de la longueur d'onde pour un réseau échelette (angle

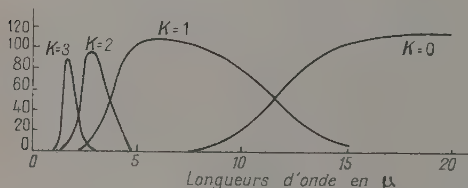


Fig. 4. — Distribution de l'intensité lumineuse en fonction de la longueur d'onde pour un réseau échelette éclairé sous l'incidence normale; angle de coupe du réseau, 8°12'; pas du réseau, 16,933 μ.

de coupe, 8°12'; pas du réseau, 16,933 μ, ce réseau est éclairé sous l'incidence normale). Nous constatons que le spectre d'ordre 0 contient les plus grandes longueurs d'onde et que les longueurs d'onde plus courtes sont concentrées dans les spectres d'ordres plus élevés. Le spectre d'ordre 0 a une dispersion nulle; il se trouve dans une direction telle que l'angle d'incidence est égal à l'angle de diffraction. Nous remarquons, en outre, que les radiations du spectre d'ordre 0 admettent pour borne inférieure de longueurs d'onde le pas du réseau. Si l'on remplace, dans un spectrographe, un miroir plan par un réseau échelette, le faisceau lumineux réfléchi par le réseau ne contient plus que les radiations de longueurs d'onde supérieures au pas du réseau, les radiations de longueurs d'onde inférieures sont dispersées dans les différents ordres, donc éliminées. White a obtenu des résultats très intéressants par cette méthode. En remplaçant dans un spectrographe un miroir plan par un réseau de 142,6 traits/mm, éclairé sous l'incidence de 15°, il obtint 10 fois moins de rayonnement parasite (ce facteur 10 est valable pour la région spectrale voisine de 14 μ). White précise que pour obtenir de bons résultats, il convient de combiner le réseau-filtre avec les filtres utilisés habituellement. Oetjen [9] emploie un tel filtre dans son spectrographe. Le réseau qu'il utilise a 14,2 traits/mm, c'est-à-dire un pas de 70 μ, il permet donc d'éliminer les radiations de longueurs d'onde inférieures à 70 μ.

6° **Surfaces réfléchissantes non polies.** — Les surfaces non polies réfléchissent l'infrarouge lointain aussi bien que les surfaces polies, il n'en est pas de même pour l'infrarouge proche. En utilisant des miroirs non polis, on pourra donc séparer l'infrarouge proche de l'infrarouge lointain. Strong [44] a étudié de tels miroirs.

IV. — Détecteurs.

Il semble qu'aucune étude récente des détecteurs utilisables n'ait été faite dans l'infrarouge lointain; nous nous contenterons donc de citer les types de détecteurs utilisés dans les travaux récents.

Randall [7], [8] utilise une thermopile. Oetjen [9] et Mc Cubbin [33], [34], [35] le détecteur pneumatique de Golay. Mais ces auteurs ne donnent pas les raisons de leur choix. A en juger d'après les résultats qu'ils obtiennent : thermopiles et détecteur pneumatique de Golay constituent des récepteurs recommandables dans l'infrarouge lointain.

V. — Principaux types de montages spectrographiques.

Un spectrographe infrarouge comprend trois compartiments distincts qui sont respectivement : le compartiment source situé avant la fente d'entrée du spectrographe; le compartiment du système dispersif compris entre la fente d'entrée et la fente de sortie; le compartiment détecteur situé après la fente de sortie. Le compartiment source comprend la source et un système optique qui permet de concentrer l'image de la source sur la fente d'entrée du spectrographe. Généralement les filtres et le modulateur se trouvent dans ce compartiment ainsi d'ailleurs que l'emplacement réservé à la cuve d'absorption. Il n'existe pas de types caractéristiques de montage du compartiment source. Ce montage est différent selon qu'il s'agit d'un spectrographe devant servir à faire des mesures d'absorption ou des mesures de pouvoir réflecteur. Il varie également suivant le domaine spectral balayé par le spectrographe; c'est ainsi que pour travailler entre 40 et 100 μ l'utilisation de miroirs s'impose, alors que pour travailler au-dessus de 100 μ il est possible d'utiliser des lentilles en quartz. Le compartiment détecteur comprend le détecteur et un système optique permettant de concentrer l'image de la fente de sortie sur la partie sensible du détecteur. Généralement on utilise un miroir très convergent (sphérique, parabolique ou elliptique); on peut, dans certains cas, utiliser une lentille en quartz pour travailler au-dessus de 100 μ; ou même placer le détecteur juste derrière la fente de sortie du spectrographe, sans aucun intermédiaire optique (lorsque la fente de sortie a des dimensions voisines de celles du détecteur). Le montage optique est tel que l'image formée sur la partie sensible du détecteur a mêmes dimensions que ce détecteur.

Le compartiment du système dispersif constitue la partie essentielle d'un spectrographe. Trois types

de montages sont particulièrement utilisés :

1° **Montage de Kühne**. — C'est un montage extrêmement simple. La figure 5 en donne le schéma de principe; F_1 et F_2 représentent les fentes d'entrée et de sortie, M_1 et M_2 deux miroirs sphériques et R le réseau. Le réseau R peut tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, ce qui permet de faire défiler les divers rayonnements monochromatiques sur la fente de sortie. Ce montage présente un inconvénient important; les miroirs sphériques ne sont pas utilisés suivant leurs axes, d'où existence d'aberrations qui peuvent être importantes. Il a été utilisé par Kühne [45], Cartwright [46], Koch [11], Maar [41], et Dahlke [12].

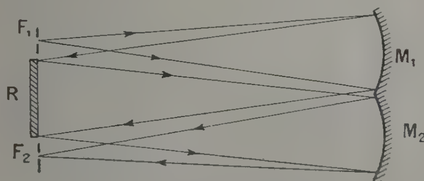


Fig. 5. — Montage de Kühne.

2° **Montage de Hopf** [40]. — La figure 6 donne le schéma de principe du montage de Hopf. Les fentes d'entrée F_1 et de sortie F_2 du spectrographe sont situées dans le plan focal du miroir sphérique M, de part et d'autre de l'axe de ce miroir et très près de cet axe. Le réseau R peut tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure. Le faisceau lumineux issu de F_1 est réfléchi par le miroir M sur le réseau R; le réseau renvoie le faisceau diffracté sur le même miroir M qui, alors, le concentre sur la fente de sortie F_2.

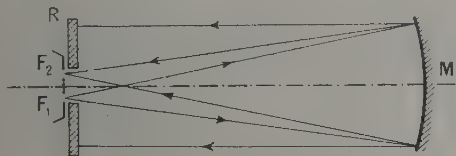


Fig. 6. — Montage de Hopf.

Ce montage présente l'avantage de n'exiger qu'un seul miroir utilisé très près de l'axe, de sorte que les aberrations sont faibles. L'inconvénient de ce montage est dû au fait que le réseau R doit être percé d'un trou central de grandes dimensions, ce qui entraîne une perte d'énergie. Hopf utilise un miroir sphérique de 60 cm de distance focale et de diamètre d'ouverture 25 cm. Il emploie un réseau lamellaire de dimensions 20 × 20 cm et des fentes longues de 4 cm. Le milieu de ces fentes est situé à 1 cm de l'axe du miroir. Mc Cubbin [33], [35] a repris récemment le montage de Hopf. Il utilise à la place du miroir sphérique un miroir parabolique d'ouverture $f/1$. Son réseau a pour dimensions 30,3 × 30,3 cm et le trou central du réseau a une surface de 64 cm².

3° **Montage de Randall** [7], [8], [47]. — Les figures 7 et 8 représentent le montage utilisé par Randall. M est un miroir parabolique off axis, R le réseau F_1 et F_2 les fentes d'entrée et de sortie, placées dans le plan focal du miroir. Elles sont très rapprochées de sorte que le miroir parabolique off axis est utilisé dans un direction très voisine de celle de son axe.

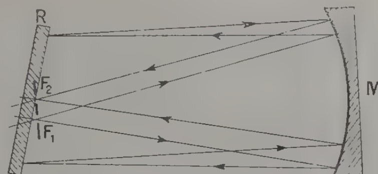


Fig. 7. — Montage de Randall, coupe horizontale par un plan contenant le centre du miroir parabolique off axis M.

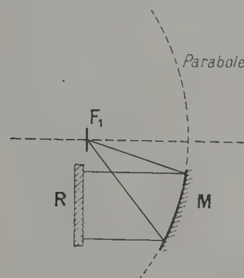


Fig. 8. — Coupe verticale du montage de Randall.

Le montage de Randall présente les avantages du montage de Hopf et il présente en outre sur le montage de Hopf l'avantage de ne pas nécessiter l'emploi d'un réseau percé d'un trou central. Randall utilise un miroir parabolique off axis de 60,9 cm d'ouverture et de 91,4 cm de distance focale. Les fentes ont une longueur de 5 cm et le réseau a pour dimensions 25,4 × 50,8 cm. Oetjen [9] utilise un montage de Randall. Le diamètre d'ouverture du miroir parabolique est de 50 cm et sa distance focale de 100 cm. Le réseau a pour dimensions 17,7 × 22,7 cm.

Conclusions.

De cet exposé, nous pouvons conclure que la mise au point d'un montage spectrométrique, utilisable dans l'infrarouge lointain, présente des difficultés techniques considérables. Ces difficultés sont dues au fait qu'il n'existe ni de bonnes sources ni de bons filtres et surtout que les énergies mises en jeu sont extrêmement faibles. Peu de résultats ont été obtenus jusqu'à maintenant dans ce domaine, ce qui témoigne bien des difficultés que l'on y rencontre. Pour terminer, nous donnerons quelques résultats récents. Le spectrographe de Randall [7], [8] a permis d'obtenir d'excellents résultats entre 25 et 200 μ. Les travaux ont porté sur l'eau [48], [49], sur l'eau lourde [50], sur l'ammoniac [49], sur l'hydrogène phosphoré [49]

et sur l'alcool méthylique [51]. Quant au spectrographe de Mc Cubbin [33] il a permis d'étudier l'acide chlorhydrique, l'ammoniac, l'eau et l'hydrogène sulfuré. Des divers types de montages que nous avons décrits, nous concluons que celui de Randall est particulièrement intéressant. Rappelons qu'il présente de nombreux avantages sur les montages de Kühne et de Hopf. Le spectrographe conçu par Oetjen [9] paraît être le meilleur appareil décrit dans la littérature.

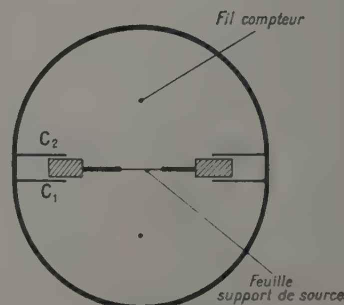
Manuscrit reçu le 11 mai 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BRUHAT. — Thermodynamique, Masson et Cie, Paris, 1947, p. 308 à 343 *bis*.
[2] RUPERT C. S. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1952, **42**, 684.
[3] SMITH L. G. — *Rev. Sc. Instr.*, 1942, **13**, 63.
[4] PARODI M. — *Thèse*, 1938, Hermann et Cie, 1938.
[5] LECOMTE J. — Le spectre infrarouge.
[6] SILVERMAN. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1948, **38**, 989.
[7] RANDALL. — *Phys. Rev.*, 1939, **56**, 982.
[8] RANDALL et FIRESTONE. — *Rev. Sc. Instr.*, 1938, **9**, 404.
[9] OETJEN. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1952, **42**, 559.
[10] STRONG. — Procedures in Experimental Physics (Prentice-Hall Inc., New York, 1938).
[11] KOCH. — *Ann. Physik*, 1938, **33**, 335.
[12] DAHLKE. — *Z. Physik*, 1939, **114**, 205 et 672; *Z. Physik*, 1940, **115**, 1.
[13] BRUHAT. — Optique, Masson et Cie, Paris, 1947.
[14] MEVEL. — *Revue Générale des Sciences pures et appliquées*, 1949, **56**, nos 1-2, p. 11.
[15] BARNES R. B. — *Rev. Sc. Instr.*, 1934, **5**, 237.
[16] MEVEL. — *Rev. Opt.*, 1948, **27**, 661.
[17] CARTWRIGHT C. H. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1931, **21**, 785.
[18] HELLWEGE. — *Z. Physik*, 1937, **106**, 588.
[19] BADGER R. M. et CARTWRIGHT C. H. — *Phys. Rev.*, 1929, **33**, 692.
[20] CARTWRIGHT C. H. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1931, **21**, 785.
[21] ROWLAND Henry A. — Gratings in theory and practice. *Astron. and Astrophys.*, 1893, **12**, 129-149 ou *Phil. Mag.*, 1893, **5**, **35**, 397-419 ou *Physical Papers* of Henry A. ROWLAND (Johns Hopkins University Press, 1902, 525-544.
[22] BADCOCK H. D. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1944, **34**, 1-5.
[23] GREIY J. H. et FERGUSON W. F. C. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1950, **40**, 504.
[24] CONN G. K. T. — Optical theory of the echelette grating. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1947, **43**, 240.
[25] STAMM Robert F. et WHALEN John J. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1946, **36**, 2.
[26] TROWBRIDGE A. et WOOD R. W. — *Phil. Mag.*, 1910, **20**, 886-898.
[27] TROWBRIDGE A. et WOOD R. W. — *Phil. Mag.*, 1910, **20**, 898-901.
[28] TROWBRIDGE A. et CRANDALL I. B. — *Phil. Mag.*, 1911, **22**, 534-547.
[29] WOOD R. W. — *Astrophys. J.*, 1905, **21**, 173-175; *Physik Z.*, 1905, **6**, 238.
[30] WOOD R. W. — *Phil. Mag.*, 1910, **20**, 770-778.
[31] WOOD R. W. — *Nature*, 1937, **140**, 723-724.
[32] WOOD R. W. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1944, **34**, 509-516.
[33] MC CUBBIN et KING. — *J. Chem. Phys.*, 1952, **20**, 668.
[34] MC CUBBIN et SINTON. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1950, **40**, 537.
[35] KING T. et MC CUBBIN. — Far infrared spectroscopy from 100 to 700 (dissertation) (the Johns Hopkins University Baltimore, Maryland, juillet 1951).
[36] WALSH A. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1952, **42**, 213.
[37] CARTWRIGHT C. H. — *Z. Physik*, 1934, **90**, 480.
[38] RUBENS et WOOD. — *Le Radium*, 1911, **8**, 44-51.
[39] RUBENS et BAEYER. — *Le Radium*, 1911, **8**, 139; *Berl. Ber.*, 1911, 339 et 668.
[40] HOPF. — *Z. Physik*, 1940, **116**, 310.
[41] O. MAAR. — *Z. Physik*, 1939, **116**, 415.
[42] RÜBENS. — *Wied Ann.*, 1899, **69**, 576.
[43] WHITE J. U. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1947, **37**, 713.
[44] STRONG J. — *Phys. Rev.*, 1931, **38**, 1818.
[45] KUHNE J. — *Z. Physik*, 1933, **84**, 722.
[46] CARTWRIGHT C. H. et CZERNY M. — *Z. Physik*, 1934, **90**, 457.
[47] RANDALL. — *Rev. Mod. Physics*, 1938, **10**, 72.
[48] RANDALL H. M., DENNISON, GINSBURG et WEBER. — *Phys. Rev.*, 1937, **52**, 160.
[49] WRIGHT N. et RANDALL H. M. — *Phys. Rev.*, 1933, **44**, 391.
[50] FUSON, RANDALL et DENNISON. — *Phys. Rev.*, 1939, **56**, 982.
[51] BURKHARD D. G. — Molecular Structure and far infrared spectrum of methyl alcohol (dissertation) (University of Michigan, Ann. Arbor, Michigan, 1950).

ERRATUM

Dans la communication de M. G. Charpak au *Colloque international sur le rôle du cortège électronique dans les phénomènes radioactifs*, (*Journal de Physique et le Radium* 1955, tome 16, n° 7, p. 569), remplacer la fig. 2 par la figure ci-contre :



LETTRES A LA RÉDACTION

SUR LA POSSIBILITÉ DE DÉSINTÉGRATION PAR CAPTURE K DU ^{59}Cu

Par Mlle Tosiko Yuasa et G. A. Renard,
Collège de France,
Laboratoire de Physique et Chimie nucléaires.

Une précédente étude de la désintégration du ^{59}Cu [1] a permis de vérifier la période de 83 ± 1 s, le spectre β^+ a été mesuré, son énergie maximum est $1,85 \pm 0,05$ MeV, sa forme est celle d'une transition permise (au-dessus de 500 keV).

D'après le calcul récent de Zweifel [2], on peut s'attendre à une capture K dont le rapport $\frac{K}{\beta^+}$, corrigé de l'effet d'écran serait $7,5 \pm 1$ pour 100.

Les difficultés de l'étude de la capture K du ^{59}Cu proviennent de la faible énergie de la raie K du Ni, 7,4 keV et de la période courte. Nous avons utilisé la méthode du compteur proportionnel dont les impulsions envoyées sur un oscillographe sont enregistrées photographiquement sur un film qui se déroule d'une manière continue. Cette méthode nécessite des statistiques longues et nous a donné des résultats imprécis. Nous avons donc continué l'étude à l'aide du sélecteur à 50 canaux mis en fonctionnement au laboratoire récemment qui nous a permis d'obtenir des résultats plus précis. Le compteur proportionnel a été rempli à la pression atmosphérique de krypton pur ou d'argon pur.

Le ^{58}Ni séparé isotopiquement à Harwell (pureté indiquée : 93,5 pour 100) est déposé électrolytiquement sur une feuille d'or de 9,6 mg/cm²; l'épaisseur de la source est de 7 mg/cm². Le dispositif expérimental se compose d'un compteur proportionnel cylindrique qui reçoit perpendiculairement au fil un fin faisceau de rayonnement; la source et le canaliseur sont placés dans le vide, les rayons β^+ sont déviés par un champ magnétique et seule la composante photonique pénètre dans le compteur par une fenêtre de formvar de 1,5 mg/cm², l'angle solide est de

$$\frac{\Omega}{4\pi} = (1,5 \pm 0,1).10^{-4}.$$

La technique des mesures et le dépouillement des résultats sont similaires à celles d'un travail antérieur [3].

Dans les diverses séries de mesures, tant par enregistrement photographique que par sélection électronique, la cible est bombardée pendant 4 mn par les deutons de 5,5 MeV du cyclotron du Collège de France. L'enregistrement des impulsions débute dans la méthode photographique et la sélection électronique respectivement $\sim 1,5$ et ~ 1 mn après la fin de l'irradiation et dure 2 mn. L'intensité totale des rayons β^+ est alors mesurée à l'aide d'un compteur-cloche dont la fenêtre de mica a une masse superficielle de 2,3 mg/cm².

Tenant compte des angles solides du canaliseur et du compteur-cloche devant la source, de l'efficacité du compteur proportionnel, et de la décroissance de l'activité pendant la mesure, nous obtenons les résultats suivants : dans le cas de l'enregistrement photographique, le spectre des photons de basse énergie obtenu montre dans la région des rayons X du Ni une bosse qui décroît avec la période du ^{59}Ni; compte tenu de l'imprécision statistique, on obtient un rapport $\frac{N_X}{N_{\beta+}}$ dont la valeur est $(2,35 \pm 1,6).10^{-2}$.

Dans le cas du sélecteur à 50 canaux, la valeur obtenue est $(9,6 \mp 1,4).10^{-3}$.

Un état isomère du ^{59}Cu est peu probable compte tenu des données statistiques de l'article de Goldhaber et Hill [4] auxquelles nous avons ajouté des données concernant les isomères à vie courte; d'autre part, l'étude des rayons γ avec un compteur à scintillations de INa (Tl) accompagné soit d'un sélecteur à canal unique, soit d'un sélecteur à 50 canaux montre l'absence de rayons γ d'intensité supérieure à 0,5 pour 100 de celle des β^+ dans la région de 80 à 500 keV. Il semble donc exclu que les rayons X proviennent d'un rayonnement de désexcitation converti du ^{59}Cu ou ^{59}Ni d'intensité notable.

Dans le cas de l'hypothèse d'une désintégration par capture K et en adoptant la valeur du coefficient de fluorescence expérimentale [5], soit 0,34, on obtient pour les valeurs du rapport $\frac{K}{\beta^+}$:

— méthode photographique : $(6,9 \pm 4,7)$ pour 100;

— méthode électronique : $(2,8 \pm 0,5)$ pour 100.

Dans ces expériences, l'unité d'erreur utilisée est l'écart étalon.

En conclusion, on peut raisonnablement penser que la capture K du ^{59}Cu, si elle existe, a une limite supérieure de l'ordre de 5 pour 100 des β_+, les résultats obtenus avec le sélecteur à 50 canaux étant plus précis.

Manuscrit reçu le 12 juillet 1955.

[1] Yuasa T., Nahmias M. E. et Vivargent M. — *J. Physique Rad.* (sous presse).
[2] Zweifel P. F. — *Phys. Rev.*, 1954, **96**, 1572.
[3] Renard G. A. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 361.
[4] Goldhaber M. et Hill R. D. — *Rev. Mod. Physics*, 1952, **24**, 179.
[5] Burhop E. H. — *The Auger Effect* (1952).

SUR LA TRANSMUTATION DU CUIVRE PAR LES IONS LOURDS

Par Mlle J. Beydon, M. R. Chaminade,
Mmes H. Faraggi, J. Olkowsky, M. A. Papineau,
Service de Physique nucléaire, C. E. N., Saclay

et Mlle M. Crut,
Institut du Radium, Paris.

Depuis quelques années, un petit nombre d'études du mécanisme de transmutations provoquées par des ions lourds ont été faites [1].

Sur les éléments légers, deux mécanismes ont été constatés :

a. fusion des deux noyaux et évaporation de nucléons avec formation de « noyau composé » [2];

b. capture partielle par le noyau cible de nucléons de l'ion accéléré qui se comporte alors comme un jet de chevrotines (buckshot) [3].

Avec les éléments lourds, il a été surtout formé de nouveaux radioéléments par un processus d'addition des deux noyaux, sans qu'il soit sûr que ce mécanisme soit prépondérant.

Nous avons utilisé les ions d'azote et d'oxygène de charge 6, accélérés dans le cyclotron de Saclay [4] à l'étude des transmutations provoquées dans le cuivre. Ces ions présentent un spectre continu d'énergie limité à environ 10 MeV par nucléon. A 65 cm du centre, la majeure partie des ions a une énergie comprise entre 20 et 60 MeV.

1. Méthode expérimentale. — Les cibles (sous forme d'empilement de feuilles d'environ 3 mg/cm²) étaient bombardées par les ions d'azote en faisceau intérieur, à un rayon de 65 cm. Les éléments formés étaient identifiés :

a. par séparation chimique;

b. par le signe et la période du rayonnement β;

c. par l'énergie et la période des rayonnements γ;

d. dans certains cas, par l'observation des filiations radioactives.

Élément.				Cu naturel + N.				^{63}Cu + N.	^{65}Cu + N.	Cu naturel + O.
Élément chimique.	Masse.	Période.	Identifié par chimie + ψ	Rendement β brut.	Rendement β corrigé du schéma.	Rendement γ brut.	Rendement γ corrigé du schéma.	Rendement corrigé.	Rendement corrigé.	Rendement corrigé.
Kr	77	1,1 h	T, γ	–	–	8	$\geq$ 3 (*)	$<$ 3	$\geq$ 12 (*)	$\geq$ 45 (*)
Br...	74	35 mn	T, β^+, γ	100	$\geq$ 20 (*)	65	$\geq$ 25 (*)	$\geq$ 40 (*)	$<$ 1	$\geq$ 20 (*)
	75	95 mn	T, β^+, γ, fil.	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**
	76	16 h	T, β^+	100	34	–	–	$\leq$ 3	100	70
Se...	70	44 mn	T, β^+, fil.	(10)	($\geq$ 2) (*)	–	–	–	–	–
	72	9,7 j	fil.	–	6	–	–	–	–	–
	73	7 h	T, β^+, γ	50	30	100	40	25	30	12
	75	127 j	T, γ	–	–	–	–	–	(10)	–
As...	70	52 mn	T, β^+, fil.	(30)	($\geq$ 6) (*)	–	–	–	–	–
	71	60 h	T, β^+, γ	100	65	200	75	85	$<$ 0,5	15
Cu...	62	10 mn	T, β^+	15	$\geq$ 3 (*)	–	–	$\geq$ 3 (*)	–	–
	64	12 h	T, β^+, β^-	25	10	–	–	$\leq$ 1	10	$\leq$ 0,1
	66	5 mn	T, β^-	15	3	–	–	–	–	–
N...	13	10 mn	T, β^+	15	3	–	–	–		–
Rb...	Masse indéterminée ($\leq$ 81) : période $\sim$ 23 mn.									$\geq$ 10 (*)

(*) Rapport d'embranchement inconnu.

Nous avons contrôlé que, pour les périodes comprises entre 10 mn et 3 jours, les éléments identifiés représentent, à 10 pour 100 près, l'activité totale des feuilles de cuivre non traitées chimiquement.

Pour connaître les rendements relatifs des différents éléments, il est nécessaire de tenir compte de leurs schémas de désintégration, souvent mal connus. Nous donnons dans le tableau les rendements relatifs rapportés à ^{75}Br = 100, avant et après les corrections dues aux schémas [5]. Ces rendements ont été déterminés indépendamment par mesure β et γ et normalisés à partir de la raie de 290 keV et de l'activité β de ^{75}Br, mesurés simultanément.

2. Résultats. — Nous avons procédé à 50 irradiations de cuivre naturel, de durées variant entre quelques secondes et quelques heures, ainsi qu'à l'irradiation des isotopes 63 et 65 isotopiquement purs [6]. Les éléments suivants ont été recherchés sans succès : Ge, Ga, Zn, Ni, Fe, Co, Mn, Cr, Sc, K, V, Al, Mg.

Quelques irradiations ont été faites à des rayons de 35 à 45 cm dans le cyclotron (énergie moyenne

comprise entre 10 et 30 MeV). La section efficace totale est alors beaucoup plus faible, bien que les rendements relatifs soient peu altérés, dans la limite des erreurs expérimentales; toutefois ceux du sélénium et de l'arsenic tendent à diminuer avec l'énergie.

Enfin, quelques irradiations de cuivre par l'oxygène ont été faites, pour obtenir les rendements relatifs des éléments Rb, Kr, Br, Se, As et Cu correspondant à l'addition et à l'échange des nucléons. Les résultats sont donnés dans le tableau mais nous ne sommes pas assurés qu'ils représentent la totalité des activités présentes. Le rubidium 23 mn que nous avons trouvé ne figure pas dans les tables. Si son existence est confirmée, il faudrait lui attribuer la masse 78 ou 80 (pas de filiation observée).

3. **Discussion.** — Il est aisé de constater, dans le cas de la réaction Cu + N, la présence des deux mécanismes proposés : addition suivie d'évaporation (formation de Kr, Br, Se, As) et échange de nucléons (cuivre, azote), l'addition étant nettement prédominante.

Abstraction faite des réactions étudiées sur des éléments très légers, avec des ions d'azote d'énergie inférieure à 30 MeV [2], il semble que l'on observe, de l'aluminium [3] au cuivre en passant par le chlore [7], une diminution progressive du mécanisme d'échange au bénéfice du mécanisme d'addition.

Un compte rendu plus détaillé paraîtra ultérieurement.

Manuscrit reçu le 2 août 1955.

[1] *Cf.* par exemple, revue d'ensemble du sujet par D. H. Walker, *Progr. nucl. Phys.*, Londres, 1954, p. 215.
[2] Cohen B. L., Reynolds H. L. et Zucker A. — *Phys. Rev.*, 1954, **96**, 1617.
[3] Chackett K. F., Fremlin J. H. et Walker D. H. — *Phil. Mag.*, 1954, **45**, 173.
[4] Debraine P. et Barriaud A. — *Onde électrique* (sous presse).
[5] Les références utilisées pour les schémas de désintégration peuvent être retrouvées dans le fichier édité par N. B. S., *Nucl. Sc. Abstr.* arrêté au 1er juillet 1955.
[6] Les isotopes séparés du cuivre nous ont été fournis aimablement par A. E. R. E., Harwell (Angleterre) ainsi que par le Séparateur d'Isotopes du C. E. A., à Saclay (France).
[7] Greenlees G. W. et Souch A. E. — *Phil. Mag.*, 1955, **46**, 685.

DIFFRACTION DES ONDES CENTIMÉTRIQUES DANS UN GUIDE PAR UNE SPHÈRE CONDUCTRICE

Par M. William Chambron,
Physique de l'Atmosphère, Faculté des Sciences, Paris.

Une petite sphère conductrice placée au centre d'un guide d'ondes produit une faible réflexion de l'onde incidente, qui est mesurée par une méthode de pont [1]. Le coefficient Γ mesuré est, selon l'usage, le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie à celle de l'onde incidente.

L'appareillage comprend essentiellement (*fig.* 1) un Té magique, dont les bras E et H portent des correcteurs d'impédance 1 et 2; ces correcteurs assurent l'adaptation exacte des quatre bras du Té pour la fréquence de travail; le générateur monté sur le bras H est constitué par : un klystron 723 A/B, un atténuateur de découplage de 10 dB environ, un ondemètre à absorption, et un atténuateur variable calibré de 20 dB. Sur le bras E du Té est monté le récepteur; ce récepteur est un hétérodyne utilisant un Té comme mélangeur, afin d'éviter un retour de l'onde locale dans le circuit étudié. Enfin l'un des bras symétriques du Té porte une terminaison

Fig. 1.

sans réflexion; sur l'autre sont montés : un tronçon de guide muni d'une tige pénétrant en son centre parallèlement au champ électrique d'un mouvement micrométrique, un autre tronçon percé de deux trous de 3 mm par lesquels on introduit la sphère diffractante, un correcteur d'impédance 3, et une terminaison sans réflexion.

Les sphères conductrices sont constituées par des gouttes d'étain supportées par un fil de verre; l'extrémité de celui-ci est introduit dans la goutte avant solidification; le fil est pris assez fin pour ne pas introduire de réflexion appréciable.

Chaque mesure se fait dans les conditions suivantes : on manœuvre le correcteur 3 jusqu'à ce que le récepteur indique zéro, on introduit la sphère d'étain, et l'on note l'indication du récepteur; on ôte alors la sphère, et l'on fait pénétrer la tige à

mouvement micrométrique jusqu'à obtenir la même indication; il suffit d'étalonner cette tige pour connaître le module du coefficient de réflexion de la sphère.

Si le défaut d'adaptation du bras est Γ', lequel est du même ordre de grandeur que Γ mesuré, l'erreur sur Γ est de l'ordre de $\Gamma\Gamma'$, c'est-à-dire négligeable.

La mesure du coefficient de réflexion introduit par la tige, en fonction de la pénétration a été faite au mesureur d'ondes stationnaires pour les valeurs de $|\Gamma|$ supérieures à 0,1, puis sur le montage même de 0,1 à 0,005, par comparaison, en utilisant l'atténuateur variable calibré incorporé.

Les résultats sont indiqués sur la figure 2. Les mesures sont faites à 9100 MHz, soit 3,3 cm. Le guide

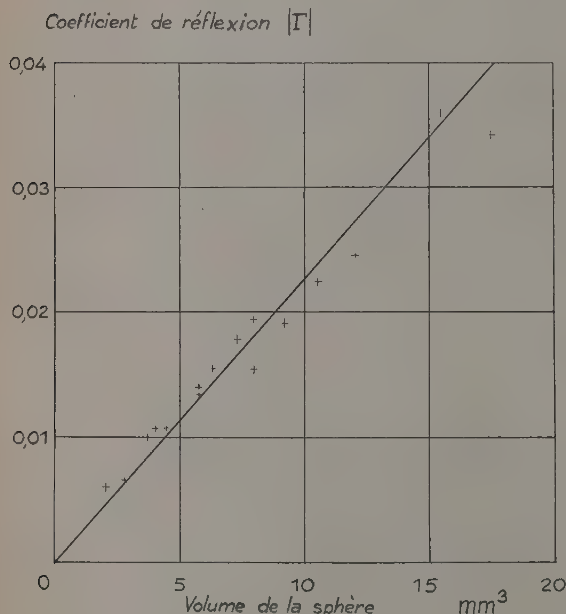


Fig. 2.

utilisé est de dimensions standard RG-52/U, soit 2,286 × 1,016 cm, la longueur d'onde dans le guide étant donc 4,76 cm. La dispersion est due principalement aux petites irrégularités géométriques des billes d'étain. On vérifie, aux erreurs d'expérience près la proportionnalité de $|\Gamma|$ au volume de la sphère.

Nous avons pu, par ailleurs constater le fait suivant : si la bille, au lieu de rester au centre du guide, est déplacée parallèlement au champ électrique, $|\Gamma|$ varie peu (puisque le champ est constant dans toute l'épaisseur du guide), mais lorsque la bille vient en contact avec la paroi il s'accroît brusquement dans un rapport important (de l'ordre de 2).

Ce travail est une première approche de l'étude plus complexe de la diffraction des ondes électromagnétiques par des nuages de particules atmosphériques, telles que gouttes d'eau, cristaux de glace ou grélons.

Manuscrit reçu le 6 août 1955.

[1] Labrum N. R. — *J. Appl. Phys.*, 1952, **23**, 1320.

UNE MÉTHODE DE CONTROLE CONTINU DES APPAREILS DE COMPTAGE D'IMPULSIONS

Par M. A. Fréon,

Laboratoire des Rayons cosmiques,
École Normale Supérieure, Paris.

L'étude des variations dans le temps de l'intensité des diverses composantes du rayonnement cosmique pose des problèmes relatifs au contrôle de la stabilité de fonctionnement des différents organes des appareils utilisés : détecteurs de rayonnement, circuits associés et leurs alimentations. Le contrôle continu des tensions d'alimentation est simple, celui des circuits est réalisable en général, tandis que les organes détecteurs ne peuvent être contrôlés que par intermittences, par exemple par substitution d'un rayonnement étalon au rayonnement à étudier. Deux méthodes sont habituellement employées :

Dans la première, les détecteurs sont divisés en deux ou plusieurs groupes reliés à des ensembles d'appareils complètement distincts, sources d'alimentation comprises. Une variation d'intensité sera alors considérée comme significative si elle affecte simultanément l'ensemble des appareils. Cette méthode a l'avantage d'éliminer les variations accidentelles, non seulement des circuits et des alimentations, mais aussi des détecteurs, elle présente toutefois, à part la nécessité d'un appareillage important, qui est multiplié par le nombre de groupes utilisés, le risque de faire considérer comme significatives, si les variations à étudier sont de faible amplitude, des dérives d'ensemble des appareils qui peuvent être dues à des résidus de variation des tensions d'alimentation provenant du secteur, malgré les dispositifs de stabilisation employés.

Une autre méthode consiste à alimenter les groupes d'appareils avec des sources d'alimentations communes, une partie des groupes enregistrant le phénomène à étudier, l'autre, une source de référence constante ou à vie moyenne suffisamment longue vis-à-vis de la durée totale des mesures de manière à rendre les corrections aussi faibles que possible, voire négligeables. Cette méthode permet, en plus de la simplification de l'appareillage, d'éliminer les fluctuations dues aux variations accidentelles de tension résultant d'un défaut de stabilisation, elle n'élimine pas, par contre, les fluctuations de sensibilité des détecteurs et des circuits associés non communs aux divers groupes.

On peut évidemment combiner les deux méthodes, ce qui permet de bénéficier à la fois de leurs avantages propres. Il ne reste plus alors qu'à chercher, dans chaque unité de mesure, qui enregistre à la

fois le rayonnement à étudier et celui d'une source de comparaison, à réduire au minimum les parties non communes des circuits.

Ayant eu à réaliser un enregistrement continu des neutrons de faible énergie, produits localement dans un bloc de plomb par la composante nucléaire du rayonnement cosmique au moyen de compteurs proportionnels à BF_3, nous avons employé la seconde méthode en lui apportant le perfectionnement suivant, qui fournit une solution du contrôle continu de la plus grande partie possible des circuits, y compris le gain des amplificateurs proportionnels :

Les lampes de couplage faisant fonction d'adaptateur d'impédance entre les compteurs et les câbles de liaison aux amplificateurs sont montées en inverseuses de phase, au lieu du montage cathode-follower habituel; elles comportent deux résistances sensiblement égales, l'une dans la cathode, l'autre dans la plaque cette dernière étant ajustée de manière à avoir le même gain, légèrement inférieur à l'unité, aux deux électrodes. Un inverseur permet de brancher le câble de liaison sur l'une ou l'autre, on peut donc inverser à volonté le signe des impulsions sans affecter leur amplitude. Il est ainsi possible d'envoyer les deux séries d'impulsions provenant du phénomène à étudier et de la source de référence dans le même amplificateur proportionnel sans les mélanger puisqu'elles sont de signe opposé. A la sortie de l'amplificateur se trouve branché comme d'habitude un discriminateur d'amplitude à seuil réglable qui sélectionne les impulsions d'un des deux signes, une lampe inverseuse de phase permet d'actionner un deuxième discriminateur identique qui sélectionne les impulsions de signe contraire.

Il y a deux conditions essentielles à réaliser pour que ce montage fonctionne correctement : Il faut d'abord que l'amplificateur ne dérive pas les impulsions ou, tout au moins que l'impulsion inverse soit d'amplitude suffisamment petite vis-à-vis de l'impulsion directe, sinon une impulsion de grande amplitude par rapport au seuil de discrimination serait comptée dans les deux voies. L'amplificateur doit donc avoir une largeur de bande suffisante et notamment s'étendant assez bas en fréquence. L'expérience nous a montré que, compte tenu de la forme du spectre amplitude/fréquence des impulsions à enregistrer, un rapport de l'ordre de 20 entre les amplitudes directe et inverse était suffisant.

Il faut, d'autre part, que la perte de comptage due aux coïncidences fortuites entre les impulsions positives et négatives soit négligeable. Cela nécessite d'abord que l'amplificateur n'allonge pas les impulsions, condition facile à réaliser, celles-ci étant, à l'origine de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-4} s. Enfin le temps mort des discriminateurs d'amplitude doit être suffisamment faible vis-à-vis de l'intervalle moyen des impulsions. Nous nous en sommes assuré en vérifiant expérimentalement avec une forte source de radium-béryllium (0,5 g de Ra) que la somme des comptages de deux compteurs fonctionnant simultanément, un sur chaque voie, était bien égale à la somme des comptages de chacun des deux compteurs fonctionnant séparément, ceci pour un flux de neutrons bien supérieur à celui à enregistrer.

Ce système nous ayant donné satisfaction, nous avons jugé bon de le décrire brièvement ici. Nous pensons le conserver dans l'appareil définitif qui combinera les deux méthodes indiquées plus haut, en divisant en deux groupes les compteurs avec des électroniques séparées, chaque groupe comportant la moitié des compteurs cosmiques et un compteur de référence actionné par la source.

Manuscrit reçu le 12 août 1955.

CUVES POUR L'ÉTUDE DES SPECTRES D'ABSORPTION DES GAZ LIQUÉFIÉS OU DES LIQUIDES EN FONCTION DE LA PRESSION ET DE LA TEMPÉRATURE. ESSAIS SUR LE BENZÈNE LIQUIDE

Par MM. B. Oksengorn et B. Vodar,
Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue.

Nous avons mis au point et perfectionné un appareil conçu par St. Robin et Vodar, et qui a déjà été succinctement décrit [1]. La disposition intérieure de la cuve a dû être remaniée pour des raisons de commodité, et le choix des matériaux s'est avéré assez critique. La figure 1 donne le détail de l'ensemble

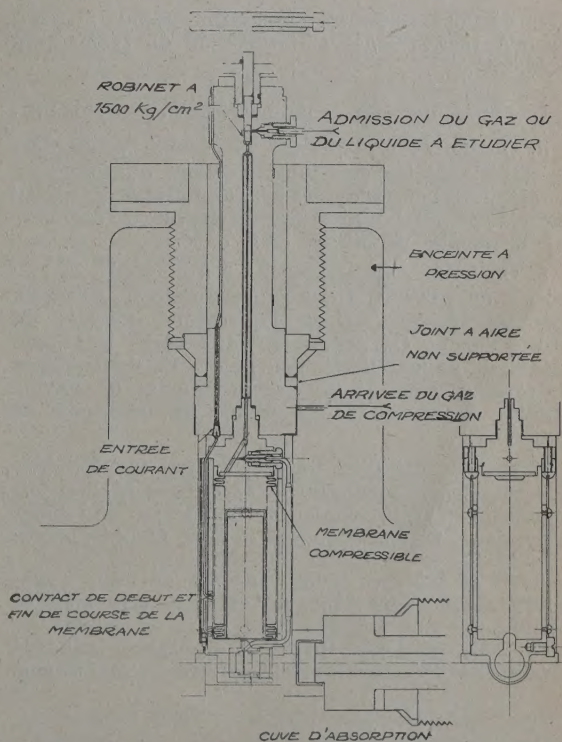


Fig. 1.

contenu dans l'enceinte en acier qui peut supporter une pression de 1500 kg/cm².

Cet ensemble est en acier inoxydable et se compose essentiellement d'un robinet à pointeau, d'une mem-

brane dans laquelle coulisse un piston et d'une cuve d'absorption démontable, reliée à la membrane par un tube. Des contacts électriques permettent de se rendre compte de la position de la membrane et un thermocouple mesure la température de la cuve. Les entrées de courant sont du type conique [2]. Nous avons eu des difficultés pour trouver une matière isolante qui tienne à la pression et aux variations de température auxquelles est soumis l'appareil. Nous avons adopté le téflon en épaisseur de l'ordre de quelques centièmes de millimètre.

L'intérêt de cet appareil est de permettre :

1° d'étudier séparément l'action de la température et celle de la densité par exemple : en faisant varier la température, le volume étant maintenu constant grâce à une variation convenable de pression;

2° d'étudier les modifications du spectre lors d'un changement d'état (pour certains gaz, le point critique peut être facilement atteint);

3° d'utiliser une cuve d'absorption usuelle; ne devant pas résister à la pression, pouvant être munie de fenêtres quelconques, être utilisée au besoin avec des substances corrosives; et permettant la réalisation d'épaisseurs variées, depuis 1 μ jusqu'à 2 mm, en changeant simplement une cale d'épaisseur;

4° de faire varier la température depuis — 90° C jusqu'à 150° C, grâce à l'utilisation du téflon pour les joints.

Le fonctionnement de l'appareillage est le suivant :

a. On fait le vide dans l'ensemble membrane-cuve d'absorption par l'intermédiaire du robinet à pointeau. Si l'on étudie un gaz, on refroidit l'appareil jusqu'à la température de liquéfaction, et l'on condense le gaz dans la membrane et la cuve.

b. On ferme ensuite le robinet à pointeau, et l'on injecte un gaz comprimé transparent dans la région spectrale étudiée. Dans l'ultraviolet moyen, on utilise l'azote. On peut aussi faire varier la température de l'appareil et ainsi maintenir un équilibre de pression entre le gaz compresseur et le corps à étudier, la membrane absorbant les variations de volume.

c. Dans le cas d'un liquide, on fait le vide dans l'ensemble membrane-cuve d'absorption et l'on fait arriver la quantité voulue de liquide par le robinet à pointeau. On opère ensuite comme précédemment.

Après la mise au point complète de notre appareillage, nous avons fait un essai avec le benzène liquide.

On sait que son spectre d'absorption dans la région de l'ultraviolet moyen est formé d'un système de bandes qui diffère de celui de la vapeur par la position des maxima (déplacement vers le rouge de 21 Å en moyenne) et par l'absence de structure de vibration. Nous avons opéré à la température de 50° C et la pression maxima atteinte a été de 1500 kg/cm². Nous avons choisi la température de 50° C pour éviter la solidification du benzène sous l'effet de la pression. L'épaisseur de la cuve d'absorption était de l'ordre du micron, pour obtenir une densité optique convenable.

Nous avons trouvé un déplacement vers le rouge de tout le système de bandes, sans variation importante de leur intensité ou de leur largeur. La figure 2 donne ce déplacement en fonction de la pression,

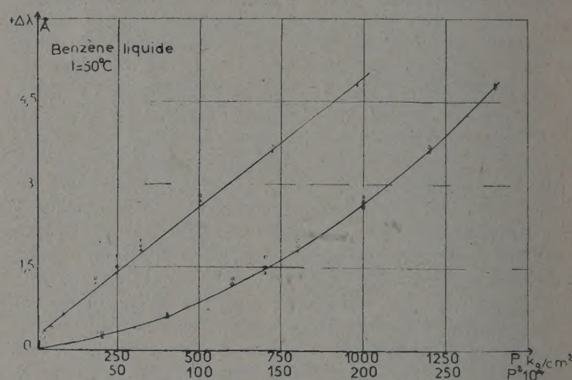


Fig. 2.

il paraît être une fonction linéaire du carré de la pression, et l'on peut aussi le considérer, en première approximation, comme une fonction linéaire du carré de la densité du liquide.

Nos résultats sont à rapprocher des quelques essais sur les solutions de benzène sous pression qui sont mentionnés par Shuler [3].

Un essai d'interprétation de ces résultats à l'aide des théories existantes (perturbations statistiques, formation des complexes [3]) sera faite en même temps que celle des données relatives à la transformation solide liquide qui seront publiées prochainement.

Manuscrit reçu le 6 août 1955.

[1] Robin St. — *Thèse*, Paris, 1951, p. 8.
[2] Lazarre F., Saurel J. R. et Vodar B. — *J. Recherches C.N.R.S.*, 1954, n° **26**, 320.
[3] Shuler K. E. — *J. Chem. Phys.*, 1952, **20**, 1865, 1; 1953, **21**, 765.

REVUE DES LIVRES

POINCELOT (P.), **Les régimes transitoires dans les réseaux électriques** (1 vol. 21 × 30 cm, 132 pages, Gauthier-Villars, Paris, 1953).

Cet Ouvrage est le second de la série de monographies consacrées aux filtres électriques. L'auteur traite de la question, si importante, des régimes transitoires et ceci en employant la méthode analytique de l'intégrale de Fourier. Il étudie successivement les filtres passe-bas, les filtres passe-haut, les filtres passe-bande, les amplificateurs, les récepteurs radioélectriques, les lignes à retard, les lignes pupinisées et câbles sous-marins. Une bonne bibliographie complète le volume.

J. COMBRISSON.

EINSTEIN (A.), **L'éther et la théorie de la relativité. La Géométrie et l'expérience** (1 vol. 14 × 22 cm, 29 pages, Gauthier-Villars, 1953, 300 f).

Dans le premier de ces opuscules, Einstein, après avoir passé en revue les diverses conceptions de l'éther, telles qu'elles se sont développées historiquement, montre que la théorie de la relativité générale conduit à douer l'espèce de propriétés physiques et dans ce sens à introduire à nouveau un éther. Cet éther ne doit pas être considéré comme un milieu pondérable. La notion de mouvement ne peut lui être appliquée.

Dans le second opuscule, Einstein, après avoir signalé l'apport fait à la Géométrie moderne par l'axiomatique, montre que le physicien est amené à envisager la Géométrie sous son aspect « expérimental » (Géométrie pratique). Il montre qu'il en est ainsi lorsque l'on veut aborder la question de savoir si l'univers est spatialement fini ou non. Il donne pour terminer un mode de représentation de l'espace sphérique à trois dimensions.

J. UEBERSFELD.

BRICARD (J.), **Physique des nuages** (1 vol. 19 × 24 cm, 343 pages, Presses universitaires, Paris, 1953, 1500 f).

Dans ce livre sont abordés les divers problèmes physiques que pose l'étude de l'atmosphère et des nuages.

Après avoir donné la classification internationale des nuages, l'auteur rappelle des méthodes d'observations et les propriétés générales des masses d'air (chap. I et II).

La formation des nuages dans les masses d'air homogènes, les liens de ce problème avec la Mécanique des fluides sont développés dans le chapitre III. Dans le chapitre IV, l'influence du relief sur la formation des nuages et divers problèmes de climatologie s'y rattachant sont à leur tour étudiés. Les chapitres V et VI sont consacrés à la constitution même des nuages : nuages de gouttelettes (chap. V), nuages de glace (chap. VI). L'auteur y aborde des questions aussi diverses que la détermination du nombre de gouttelettes dans un nuage ou que l'apparition du givrage; à propos des nuages de glace, les diverses formes de cristallisation de la glace sont données, accompagnées de considérations théoriques.

La formation de la pluie, les méthodes les plus modernes d'étude de ce phénomène font l'objet du chapitre VII, en particulier les méthodes utilisant la détection électromagnétique (radar).

La diffusion et la transmission des radiations (lumière visible, infrarouge, ondes radioélectriques courtes) par les nuages font l'objet des chapitres VIII et IX.

L'auteur signale à ce propos des études sur le rayonnement nocturne des nuages. Le chapitre X est consacré à l'étude du champ électrique (intérieur et extérieur) des nuages. Diverses méthodes de mesure sont données. Les relations entre les courants électriques de l'atmosphère, la formation des nuages et la charge électrique des précipitations sont étudiées en détail dans le chapitre XI. Le problème de l'origine de l'électricité des nuages et les diverses théories s'y rattachant (Fraenkel et Wilson) sont exposés dans le chapitre XII.

Les trois derniers chapitres du livre traitent de l'éclair : structure, phénomènes annexes, paratonnerre, mécanisme même de la décharge. L'auteur développe à ce sujet diverses théories et décrit de nombreuses expériences de laboratoire.

J. UEBERSFELD.

BLANC-LAPIERRE (A.), GOUDET (G.) et LAPOSTOLLE (P.), **Electronique générale** (1 vol. 16 × 26 cm, 395 pages, Editions Eyrolles, Paris 1953, 3 300 f).

Dans la préface, les auteurs indiquent que leur livre, destiné aux Élèves de l'École supérieure des Télécommunications, vise un double but : d'une part, « compléter les connaissances générales de ceux-ci » et, d'autre part, « jeter un pont entre les lois physiques de base, relatives à l'extraction des électrons hors de la matière ainsi qu'à leur comportement dans le vide et les caractéristiques des tubes électroniques dans lesquels ils sont utilisés ».

Dans l'introduction (chap. I), il est indiqué que l'on groupe sous le nom d'Électronique deux catégories de phénomènes : « ceux dans lesquels l'aspect corpusculaire de la charge électrique est fondamental et ceux dans lesquels l'électron apparaît hors de la matière, dans le vide ou les gaz raréfiés ». Le contenu de l'Ouvrage est ainsi défini.

La première partie du livre, consacrée à l'électron et ses propriétés électromagnétiques, comprend les chapitres suivants :

Chapitre II. — *Les particules microscopiques électrisées; L'électron; Les tubes électroniques*, où sont passés en revue les principaux phénomènes qui peuvent être groupés sous le nom d'Électronique.

Chapitre III. — *L'électron et la théorie électromagnétique classique.* A partir des équations de Maxwell, on obtient les différentes expressions des forces, champs et potentiels. La plupart de ces évaluations sont faites au moyen du champ électromagnétique considéré comme un tenseur antisymétrique du deuxième ordre dans un espace à quatre dimensions.

Chapitre IV. — *L'Électron et la théorie de la Relativité restreinte.* Un exposé général de la Relativité précède une brève application de ces notions à l'Électromagnétisme.

La deuxième partie du livre traite de l'Émission électronique.

Le chapitre V donne des généralités sur la technique du vide.

Le chapitre VI : *Théories électroniques des métaux*, permet d'exposer successivement la théorie classique des métaux (Drude, Lorentz), la théorie de Sommerfeld, où la mécanique quantique est introduite et enfin la théorie de Bloch-Brillouin où l'on prend en compte la « périodicité » avec laquelle les atomes sont disposés pour former les métaux. Il est peut-être regrettable que cette dernière théorie soit moins développée que les deux premières.

Le chapitre VII est consacré à l'*émission thermoélectronique*. Ce chapitre, très intéressant, débute par des considérations théoriques et se poursuit jusqu'aux détails technologiques de fabrication des cathodes.

Le chapitre VIII relatif à l'*émission électronique secondaire* fournit les données de base sur ce phénomène et en signale les applications.

L'étude de l'*émission électrique* et de ses applications constitue le chapitre IX.

Un bref chapitre X est consacré à l'*émission froide*.

Le chapitre XI contient une très bonne étude des *fluctuations dues à la nature granulaire de l'électricité*.

La troisième partie du livre traite de l'Optique électronique et ses applications.

L'Optique électronique y est définie comme l'ensemble des procédés qui permettent de guider les électrons extraits de la matière.

Le chapitre XII : *Optique électronique*, est consacré, d'une part aux méthodes d'études des champs électrostatiques (méthodes électriques dans les cas simples, méthode mécanique de Liebmann Southwell, cuve électrolytique; emploi de membrane de caoutchouc), des champs magnétiques et à la détermination des trajectoires électroniques et, d'autre part, à l'étude des lentilles électrostatiques ou magnétiques dans l'approximation de Gauss.

Les *canons à électrons* sont décrits dans le chapitre XIII.

Le chapitre XIV est consacré au *microscope électronique*. Dans l'introduction de ce chapitre, il est indiqué que l'on n'a pu créer une optique des rayons X.

Signalons à ce propos les travaux de Kirkpatrick sur un microscope à rayons X (des progrès récents dans cette technique ont été publiés, mais elle reste néanmoins très délicate). Les avantages, inconvénients et performances des microscopes électroniques, magnétiques et électrostatiques, sont donnés.

Le chapitre XV donne des notions sur les échanges d'énergie dans les tubes électroniques et la production d'énergie électromagnétique. Ce chapitre permet ainsi de saisir les principes de fonctionnement des tubes à modulation de vitesse et des tubes à ondes progressives.

Le chapitre XVI est consacré aux *accélérateurs de particules :* accélérateur à haute tension avec générateurs Van de Graff et accélérateur à champ variable : cyclotron, bétatron, synchrotron et accélérateur linéaire.

Dans des appendices à la fin du volume sont réunis :

— un rappel de quelques éléments du calcul des probabilités, très clair et contenant beaucoup de faits;

— quelques résultats de mécanique statistique classique;

— l'étude du potentiel dans un faisceau électronique.

Une bibliographie, classée par chapitre, termine le volume (les livres de Hume-Rothery ne sont pas cités à propos du chapitre sur la théorie électronique des métaux).

Dans l'ensemble, ce livre est agréablement rédigé et les exposés sont très clairs, reprenant toujours les questions à la base. On pourrait presque reprocher aux auteurs d'avoir mis trop de choses dans leur livre, mais une fois que l'on a admis leur point de vue et la définition de l'*Électronique*, on ne peut que les approuver. Beaucoup de sujets sont pour la première fois traités dans un livre d'Enseignement français et il faut remercier les auteurs de cet effort.

J. Fournet.

Les cendres radioactives de l'explosion nucléaire (The radioactive dust from the nuclear detonation) (1 vol. 18 × 26 cm, 133 pages; Suppl. issu, *Bull. of the Institute for Chemical Research*, Kyoto University, Kyoto, Japan).

Cet Ouvrage contient 14 rapports sur les études physiques, chimiques et médicales poursuivies dans cet Institut, durant quatre mois depuis avril 1954, sur le comportement des cendres radioactives tombées à bord du bâteau de pêche japonais *Fukuryu-maru* No. 5, après l'expérience U. S. A. de bombe thermonucléaire faite le 1er mars 1954 sur les bancs de corail de Bikini. C'est un des premiers ouvrages scientifiques écrits en anglais concernant ce sujet. Les études ont été faites en faisant appel à diverses techniques : cristallographie des rayons X, microscopie électronique, autoradiographie, plaques nucléaires, compteurs Geiger et scintillateurs liquides, chromatographie sur colonnes de résine, etc.

Dans la partie physicochimique, l'analyse des éléments radioactifs contenus dans les cendres a décelé : ^{45}Ca, ^{89}Sr, ^{91}Y, ^{95}Zr, ^{95}Nb, ^{103}Ru, ^{103}Rh, ^{106}Ru, ^{129}Te, ^{131}I, ^{140}Ba, ^{140}La, ^{144}Ce, ^{144}Pr et ^{237}U.

D'après l'analyse au microscope électronique et par la cristallographie des rayons X, on a conclu que les bancs de corail étaient évaporés ($T = 2\,850°$ C) puis recristallisés sous forme de $CaCO_2$ ou CaO.

Ce recueil contenant de nombreux tableaux et planches est précieux comme document scientifique traitant de ce genre d'événements ainsi que comme exemple de collaboration de divers domaines de recherches. (On peut se procurer ce recueil en s'adressant à l'Institut de Recherches chimiques de l'Université de Kyoto.)

T. Yuasa.

Rothery (W. H.) et Raynor (G. V.), **La structure des métaux et des alliages (The structure of metal and alloys)** (1 vol. 14 × 22 cm, 364 pages, 274 figures, Institut of Metals, London, 1954, 35 $).

Les auteurs présentent une troisième édition de leur Ouvrage paru en 1936.

La partie réservée aux solutions solides et aux phases intermédiaires dans les alliages a été considérablement étendue.

De nouvelles sections sont ajoutées sur les alliages ternaires et les alliages du fer, tandis que le chapitre traitant des imperfections du cristal a été étendu à la lumière de la théorie actuelle de la dislocation.

Bref l'édition actuelle, trois fois plus importante que l'originale, est plus que jamais l'outil théorique de base du métallurgiste, mais intéresse également le physicien et le cristallographe.

Le physicien sera heureux d'y trouver, avec un chapitre assez étendu sur les rayons atomiques, une présentation simple des zones de Brillouin et de l'arrangement électronique des atomes; il constatera que la théorie actuelle du solide est vérifiée par les règles de Hume-Rothery dans les alliages.

Le cristallographe découvrira dans le dernier chapitre un exposé actuel des imperfections du cristal : inclusions, impuretés, structure mosaïque, polygonisation, agitation thermique, dislocations, défauts de Frenkel et Schottky, déformation plastique, macles, etc.

Y. Le Corre.

White (M. W.) et Manning (K. V.), **La Physique expérimentale dans les collèges américains (Experimental College Physics)** (1 vol. 16 × 24 cm, 348 pages, Mc Graw-Hill Book C°, London, 1954, 37 s).

Ce manuel présente un choix d'expériences qui illustrent les principaux chapitres de Physique étudiés au cours du deuxième cycle. Dans chaque chapitre, les auteurs donnent un bref rappel de théorie, des instructions pour les manipulations exposées avec une habile pédagogie et enfin quelques questions et problèmes qui permettent de vérifier les connaissances acquises.

A. Clayer.

Le Gérant : Maurice Blondin. 148324 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1955.